Equilibre général, nouveaux marchés et économie du changement climatique

Antoine Mandel

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON-SORBONNE

THÈSE[1]

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
Discipline : Mathématiques Appliquées

présentée par

Antoine MANDEL

*
*   *

EQUILIBRE GÉNÉRAL, NOUVEAUX MARCHÉS ET ECONOMIE DU CHANGEMENT CLIMATIQUE.

*   *
*

Thèse soutenue le 29 Juin 2007 devant le jury composé de

M. Jean-Marc BONNISSEAU	Professeur à l'Université Paris 1	Directeur
M. Alain CHATEAUNEUF	Professeur à l'Université Paris 1	
M. Bernard CORNET	Professeur à l'Université Paris 1	
M. Bertrand CRETTEZ	Professeur à l'Université de Franche-Comté	Rapporteur
M. Marc-Olivier CZARNECKI	Professeur à l'Université Montpellier 2	Rapporteur
M. Michel DE LARA	Professeur à l'ENPC	
M. Elyès JOUINI	Professeur à l'Université Paris 9 Dauphine	

[1] N° d'ordre: 00000

Les différents corps ne possèdent point au même degré la faculté de contenir la chaleur, de la recevoir, ou de la transmettre à travers leur superficie. Ce sont trois qualités spécifiques que notre théorie distingue clairement, et qu'elle apprend à mesurer.

Il est facile de juger combien ces recherches intéressent les sciences physiques et l'économie civile, et quelle peut être leur influence sur les progrès des arts qui exigent l'emploi et la distribution du feu. Elles ont aussi une relation nécessaire avec le système du monde, et l'on connaît ces rapports, si l'on considère les grands phénomènes qui s'accomplissent près de la surface du globe terrestre.

En effet, le rayon du soleil dans lequel cette planète est incessamment plongée, pénètre l'air, la terre et les eaux ; ses éléments se divisent, changent de directions dans tous les sens, et pénétrant dans la masse du globe, ils en élèveraient de plus en plus la température moyenne, si cette chaleur ajoutée n'était pas exactement compensée par celle qui s'échappe en rayons de tous les points de la superficie, et se répand dans les cieux.

Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur.

Remerciements

Alors que ce manuscrit semble clore mes années étudiantes, je tiens en y mettant un point final à exprimer toute ma reconnaissance aux maîtres qui m'ont guidé au cours de ces années et m'ont transmis une part de leur savoir. Le plus important d'entre eux restera sans nul doute le Professeur Jean-Marc Bonnisseau qui a orienté mon travail vers ce sujet passionnant puis a dirigé mes recherches avec énormément d'attention de patience et de clairvoyance, m'enseignant mille choses à chacune de nos rencontres.

Les nombreux conseils et remarques présents dans les rapports des Professeurs Crettez et Czarnecki sont parmi les leçons les plus riches que j'aurai reçues. Je souhaite les en remercier chaleureusement et espère pouvoir me montrer digne du temps qu'ils ont consacré à l'examen de ce manuscrit.

J'avais d'ores et déjà une grande dette envers le Professeur Jouini, ses travaux étant à la source de nombre des résultats présents dans cette thèse. J'espère en avoir respecté l'esprit et le remercie pour le grand honneur qu'il me fait en participant à ce jury.

J'assistais parfois aux rencontres « Mathématiques et Environnement » organisées par le Professeur De Lara, j'y ai beaucoup appris et suis resté subjugué par sa façon de mêler la poésie de la nature aux mathématiques. Je le remercie pour tout ce que j'ai alors pu découvrir et également pour le grand honneur qu'il me fait en participant à ce jury.

Le Professeur Alain Chateauneuf m'a beaucoup encouragé et conforté durant ces années de thèse en me permettant d'enseigner et en me donnant de très judicieux conseils, en aparté. Je tiens à le remercier pour chacune de ces recommandations et pour avoir accepté de juger aujourd'hui ce manuscrit.

Le Professeur Bernard Cornet fut un enseignant charismatique durant mon D.E.A et un directeur de laboratoire exigeant mais on ne peut plus accueillant qui m'a permis d'effectuer ma thèse dans des conditions extraordinaires au CERMSEM. Je lui en suis infiniment reconnaissant et me trouve comblé par sa présence dans ce jury.

D'autres personnes ont marqué mes moments au CERMSEM.

J'ai beaucoup travaillé avec Alexandrine Jamin durant l'année 2005 sur des sujets liés au second chapitre de cette thèse et beaucoup appris d'elle.

Monique Florenzano m'a offert l'opportunité de participer au réseau « Public Good, Public Projects, Externalities » .

Lors de ses visites au laboratoire, Philippe Courrège me donnait de brèves mais denses leçons de science.

Pascal Gourdel m'a fait confiance pour participer à ses enseignements.

Christophe Chorro m'a donné de nombreux conseils durant ces trois dernières années et plus encore durant les derniers moments de cette thèse.

Wassim Daher m'a accueilli parmi les doctorants et m'a transmis de précieux secrets.

Chacun des membres du laboratoire m'a apporté un conseil ou une idée.

En particulier, les doctorants d'hier et d'aujourd'hui ont été des compagnons de travail plein de générosité et de sympathie.

Qui sait que je lui dois tout.

Table des matières

Introduction

Le climat terrestre a permis l'apparition de la vie et façonné l'organisation des sociétés humaines. Il conditionne encore la production de nourriture, la disponibilité des ressources naturelles, les besoins en énergie, les modes d'habitat, de transport, tout comme le quotidien des individus. Ainsi, il dresse le cadre dans lequel se déroule l'activité économique par laquelle l'homme subvient à ses besoins matériels.

A cette influence du climat sur l'homme répond depuis le début de la révolution industrielle une influence de l'homme sur le climat[2]. L'homme a utilisé comme source principale d'énergie les combustibles fossiles. Ce faisant, il a rejeté d'importantes quantités de gaz à effet de serre dans l'atmosphère, la concentration du dioxyde de carbone passant ainsi de 280 parties par millions (ppmv) avant l'ère industrielle à 380 ppmv aujourd'hui (voir IPCC (43), Guesnerie (37)). A travers le mécanisme de l'effet de serre, connu depuis les travaux de De Saussure, de Fourier et d'Arenhuis (voir Dufresne (31)), cet accroissement de la concentration du dioxyde de carbone dans l'atmosphère (ainsi que celle d'autres gaz, notamment le méthane et le protoxyde d'azote) est responsable, d'après la quasi-totalité des climatologues, du réchauffement climatique observé depuis le début de l'ère industrielle.

Schématiquement, le mécanisme de l'effet de serre s'explique par la comptabilité suivante des échanges énergétiques entre la surface terrestre, l'atmosphère et

[2]Dans cette thèse, on considère comme un fait que l'augmentation de la concentration atmosphérique des gaz à effets de serre depuis le début de la révolution industrielle est la principale cause du réchauffement climatique observé durant la période écoulée. Ce parti est pris devant le consensus quasi-unanime de la communauté scientifique sur le sujet (voir les rapports (42) et (43) du Groupe d'Experts Intergouvernemental sur l'Evolution du Climat), cependant notre ignorance en la matière et la présence de quelques voix discordantes non dépourvues de crédibilité scientifique nous font prendre la précaution de cet avertissement.

l'univers extérieur. La terre reçoit de l'énergie sous forme de rayonnement solaire, principalement dans le spectre visible. Elle renvoie cette énergie sous forme de rayonnement infrarouge vers l'extérieur. Une partie de ce rayonnement infrarouge est absorbée par l'atmosphère puis renvoyée par celle-ci dans toute les directions, notamment vers la terre. A l'équilibre, la quantité d'énergie émise par la terre sous forme de rayonnement infrarouge doit être égale à la quantité d'énergie reçue du soleil plus la quantité d'énergie en provenance de l'atmosphère. D'autre part, la quantité d'énergie émise par la surface terrestre est une fonction croissante de sa température. A l'équilibre la température doit donc être telle que l'énergie émise par la terre soit égale à l'énergie reçue du soleil et de l'atmosphère. Maintenant, la quantité d'énergie absorbée et réémise vers la terre par l'atmosphère dépend positivement de la concentration en gaz à effets de serre. Lorsque cette concentration augmente, la quantité d'énergie totale reçue par la terre augmente également, et la terre se réchauffe jusqu'à atteindre la température permettant l'établissement d'un nouvel équilibre énergétique.

Cette augmentation de la température est susceptible d'entraîner de nombreuses modifications des autres paramètres climatiques : précipitations, vents, nuages, phénomènes météorologiques extrêmes ; puis de l'environnement par la montée des eaux et l'évolution des écosystèmes. Ensemble de phénomènes qui ne peuvent qu'influencer l'activité économique (voir (37), (43)), engendrant une série de coûts. Coûts dus à la détérioration du capital naturel support des activités productives (agriculture, sylviculture, pêche), coûts liés à l'adaptation (protection des côtes, climatisations), coûts sanitaires liés à la transmission accrue de certaines maladies, coûts des migrations des « réfugiés climatiques » et des délocalisations du capital productif, coûts des destructions par inondations et cyclones, ou coût du risque proprement dit. D'autre part, coûts « non-marchands » liés à la perte de biodiversité ou à la disparition d'une partie du patrimoine naturel. D'un autre côté certaines régions des hautes latitudes pourraient bénéficier d'un adoucissement de leur climat.

L'évaluation de ces dommages est relativement délicate (voir Stern (55), Guesnerie (37)) mais du point de vue de la théorie économique, la situation est bien saisie par la notion d'externalité : l'usage de combustibles fossiles dans le secteur productif entraîne via l'effet de serre et le changement climatique qui lui est associé, des conséquences, souvent négatives, sur la production et la consommation, sans que ces effets ne soient évalués par le marché ou pris en compte dans les choix des agents individuels.

Cette « externalité climatique » a commencé à susciter la préoccupation à la fin des années 1970 ; en 1979, la première conférence sur le climat organisée par l'organisation météorologique mondiale (voir (61)) exprime sa préoccupation au sujet du fait que « l'expansion continue des activités humaines sur la terre risque de provoquer des changements climatiques à l'échelle régionale et même mondiale. » Dix ans plus tard, Le Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat (IPCC) est constitué et chargé d'évaluer l'état des connaissances scientifiques sur le sujet, de mesurer les effets du changement climatique et de formuler des solutions réalistes. En 1992, était signée, dans le cadre de l'O.N.U, la Convention cadre sur le changement climatique (voir (57)) qui fixe comme objectif la stabilisation des « concentrations de gaz à effet de serre dans l'atmosphère à un niveau qui empêche toute perturbation anthropique dangereuse du système climatique » et ce en convenant « d'atteindre ce niveau dans un délai suffisant pour que les écosystèmes puissent s'adapter naturellement aux changements climatiques, que la production alimentaire ne soit pas menacée et que le développement économique puisse se poursuivre d'une manière durable. » Devant l'ampleur du phénomène et la nécessité exprimée dans le second rapport d'évaluation de l'IPCC (42) d'une solide action politique, le Protocole de Kyoto (58), conclu en 1997 et entré en vigueur en février 2005, a renforcé la contrainte. Les pays industrialisés se sont engagés à respecter des quotas de réduction ou de limitation de leurs émissions de gaz à effet de serre à compter de la première période dite d'engagement, soit 2008 – 2012.

Les engagements souscrits par les pays développés sont ambitieux, notamment une réduction de 8 % par rapport à leurs émissions de 1990 pour les pays de l'Union Européenne (voir (37), et Bohringer (3)). Pour faciliter la réalisation de ces objectifs, le protocole de Kyoto prévoit la possibilité de recourir à des mécanismes dits « de flexibilité ». Tout d'abord les « permis d'émission », cette disposition permet de vendre ou d'acheter des droits à émettre entre pays industrialisés. D'autre part la « mise en œuvre conjointe » (MOC) permet, entre pays développés de procéder à des investissements visant à réduire les émissions de gaz à effet de serre en dehors de leur territoire national et de bénéficier des crédits d'émission générés par les réductions ainsi obtenues. Enfin le « mécanisme de développement propre » (MDP), proche du dispositif précédent, à la différence que les investissements sont effectués par un pays développé, dans un pays en développement. Au sein de l'Union Européenne, les mécanismes de permis d'émission négociables ont été étendus aux secteurs industriels les plus utilisateurs de combustibles fossiles, production d'énergie et sidérurgie notamment, dans le cadre du système européen de marché de permis d'émission pour les gaz à effet de serre (EUETS).

L'établissement de quotas fait du droit d'émettre du dioxyde de carbone une ressource rare. La théorie classique voit dès lors dans le marché un mode d'allocation efficace de cette ressource : indépendamment de la distribution initiale des quotas, un marché compétitif permet l'égalisation des coûts marginaux de réduction des émissions et conséquemment la réalisation de l'objectif global de réduction des émissions au moindre coût (voir Godard (36), Tietenberg (56)). Ce raisonnement d'équilibre partiel fait abstraction des interactions entre les marchés de droits et le reste de l'économie. Or, étant donné les relations cruciales qu'entretiennent les émissions de gaz à effet de serre avec les secteurs clés que sont la production d'énergie et les transports, l'ouverture d'un tel marché, influence nécessairement le fonctionnement de l'ensemble de l'activité économique.

Cette thèse développe précisément une analyse, dans le cadre de la théorie de l'équilibre général avec rendements croissants, des relations qu'un marché de droit, du type permis d'émission négociable, entretient avec l'activité économique dans son ensemble. L'intérêt d'une approche d'équilibre général est qu'elle permet la prise en compte des interactions entre marchés de droits et marchés de biens traditionnels et qu'elle offre un cadre synthétique pour résoudre les importants problèmes conceptuels que sont l'existence d'équilibre avec un marché de droits et les propriétés d'optimalité au sens de Pareto de ces équilibres. Une fois fait le choix de la théorie de l'équilibre général s'imposait la prise en compte des rendements croissants. En effet, la production d'énergie et les transports représentent à eux deux plus de la moitié des émissions de gaz à effet de serre dans le monde. Or, ces secteurs d'activité sont également ceux où la présence de rendements croissants est le plus fréquemment observé (voir les considérations développées par Hotelling (40) et plus récemment Buchanan et Yong (15)).

Surgit cependant une interrogation légitime sur l'interprétation des résultats obtenus dans ce cadre théorique. L'existence d'un équilibre doit alors être pensée comme assurant la capacité de l'économie à subir l'ouverture d'un marché de droit sans modifications trop importantes de son organisation. L'optimalité mesure l'efficacité d'un marché de droits dans la prise en compte des enjeux environnementaux. Une autre possibilité d'interprétation est offerte par la comparaison des équilibres d'économies avec et sans marché de droits, afin de déterminer dans des exercices de statique comparative les propriétés qualitatives du marché.

D'autre part, le caractère dynamique du changement climatique pourrait sembler incompatible avec la perspective statique de l'équilibre général. Au contraire, il nous semble que la prise en compte, implicite dans le corps du texte, de biens datés et contingents permet une vision synthétique de phénomènes se déroulant sur une longue période, dans la mesure où l'accent est mis sur les conditions physiques de la production plutôt que sur son volet financier qui est lui sensible à l'incomplétude des marchés.

Dans l'ensemble, sans prétendre parvenir à des recommandations concrètes, on souhaite participer à l'élaboration d'un cadre de réflexion permettant une analyse approfondie des problèmes économiques liés au changement climatique et à l'ouverture de marchés de droits. Problématique qui, réciproquement, pose d'intéressantes questions à la théorie. Dans le premier chapitre de cette thèse, on définit un cadre d'analyse en introduisant un modèle d'équilibre général avec externalités et rendements croissants. En utilisant la théorie du degré, nous prouvons dans ce cadre l'existence d'équilibre de tarification générale et de tarification marginale.

Dans le second chapitre, la création d'un marché de droits apparaît comme une perturbation de cette situation initiale d'équilibre. La dimension d'évolution portée par la notion de *création* d'un nouveau marché impose une distinction dans la formalisation du comportement des entreprises avant et après l'ouverture du marché. On s'éloigne ainsi de l'axiomatique traditionnelle de la théorie de l'équilibre général construite pour un ensemble de marchés fixés. Ce phénomène est encore accentué par la présence d'externalités qui rendent irréalistes un certain nombre d'hypothèses, notamment la libre-disposition des biens. L'existence d'équilibre après l'ouverture du marché de droits devient donc un enjeu théorique aussi bien qu'un questionnement sur la viabilité de l'économie ainsi perturbée. Nous décrivons alors les modifications du comportement des agents, principalement des entreprises, nécessaires au rétablissement d'une situation d'équilibre.

On s'intéresse ensuite aux propriétés d'optimalité au sens de Pareto des équilibres de tarification marginale avec marché de droits. En effet, bien que le but premier du marché de droits soit l'allocation d'une ressource rare et non la correction exacte des effets externes, il définit néanmoins indirectement une valeur pour l'environnement. Nous étudions divers mécanismes permettant de faire coïncider cette valeur avec l'évaluation collective de la valeur de l'environnement, situation qui se trouve être Pareto optimale. Ces mécanismes reposent sur le fait qu'en présence d'un marché de droits, la fourniture du bien public environnemental se fait gratuitement par la fixation d'une quantité maximale de pollution. Ceci relâche partiellement la contrainte de « passager clandestin » : on peut implémenter un optimum de Pareto comme solution du problème du consommateur au bord de son ensemble de consommation où l'ensemble des prix acceptable est suffisamment large. On montre ainsi que tout optimum de Pareto peut être décentralisé comme équilibre de tarification marginale. A mesure que l'accès des consommateurs au marché des droits est amplifié, voire subventionné, l'ensemble des équilibres approxime de plus en plus finement l'ensemble des optima.

Dans le dernier chapitre, nous étendons le problème de décentralisation en présence d'externalités au cas où le critère d'efficacité globale de la production diffère de la somme des ensembles de production individuels. A la source traditionnelle d'inefficacité que sont les externalités, nous ajoutons en fait la possibilité que les entreprises commettent des erreurs dans la détermination de leurs capacités de production. Cette construction nous est suggérée par les différences apparentes de préoccupation sur les conséquences du changement climatique entre entreprises et gouvernements que nous interprétons comme le reflet de différentes prévisions sur les conséquences du changement climatique sur les possibilités de production. Nous obtenons dans ce cadre des résultats de décentralisation par le biais d'un marché de « droits de production » qui transfère les coûts de l'inefficacité collective à chaque entreprise.

Afin de mettre notre travail en perspective, nous présentons d'abord dans cette introduction le modèle d'équilibre général avec rendements croissants. Nous présentons ensuite la modélisation classique des externalités. Nous rappelons enfin les éléments de théorie du degré utilisés dans les preuves d'existence d'équilibre et quelques résultats de la littérature sur la décentralisation des optima de Pareto en présence d'externalités. Vient ensuite un résumé détaillé de nos contributions.

A Le modèle d'équilibre général avec rendements croissants

Le modèle d'équilibre général *à la* Arrow-Debreu (voir les ouvrages de référence, *Théorie de la valeur* de Debreu et Arrow-Hahn (2)) est construit essentiellement dans la perspective d'un équilibre concurrentiel, situation où un système de prix coordonne efficacement les choix individuels de consommateurs maximisant leur utilité et de producteurs maximisant leur profit. L'hypothèse de rendements d'échelle décroissants est un prérequis pour assigner aux entreprises la maximisation de profit comme règle de comportement. En effet, en présence de non-convexités, la maximisation du profit est susceptible de repousser à l'infini les choix de production, signant ainsi l'échec des prix à assurer la coordination des choix individuels.

La prise en compte de rendements croissants dans un modèle d'équilibre général nécessite donc une redéfinition du comportement des entreprises. Celle-ci s'est d'abord opérée à partir des travaux de Guesnerie (38) par la définition d'équilibres de tarification marginale auxquels les entreprises sont simplement supposées satisfaire les conditions nécessaires du premier ordre pour la maximisation du profit, formalisées au moyen du cône normal de Clarke, ou d'autres cônes de l'analyse non-lisse. Plus généralement, on peut définir la règle de tarification d'une entreprise à rendements croissants comme une correspondance qui, à tout plan de production efficace associe un ensemble de prix que l'entreprise estime acceptables.

Dans ce cadre, un équilibre est une situation où les marchés sont apurés, où les consommateurs maximisent leur utilité sous leur contrainte de budget et où le prix est acceptable pour chaque entreprise.

1 Description de l'économie

On s'intéresse à une économie avec un nombre fini L de biens (indicés par $\ell = 1 \ldots L$) parfaitement divisibles, un nombre fini m de consommateurs (indicés par $i = 1, \ldots, m$) et un nombre fini n d'entreprises (indicées par $j = 1, \ldots, n$).

L'espace des biens est $\mathbb{R}^L$. Ainsi, les choix, ou plans, des agents sont des vecteurs $x = (x_\ell)$ de $\mathbb{R}^L$, chaque composante[3] x_ℓ représentant une quantité de bien ℓ, achetée ou vendue selon le signe qui lui est associé.

Nous considérerons des systèmes de prix normalisés dans le simplexe. Un système de prix sera donc un vecteur[4] du sous-ensemble $S := \{p \in \mathbb{R}^L_+ \mid \sum_{\ell=1}^L p_\ell = 1\}$ de

[3]Pour tous vecteurs $x = (x_\ell)$ et $y = (y_\ell)$ de $\mathbb{R}^L$ on notera $x \geq y$ lorsque $x_\ell \geq y_\ell$ pour tout $\ell = 1, \ldots, L$ et $x > y$ lorsque $x_\ell > y_\ell$ pour tout $\ell = 1, \ldots, L$. $\mathbb{R}^L_+$ désignera l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^L$ tels que $x \geq 0$ et $\mathbb{R}^L_{++}$ l'ensemble des vecteur x de $\mathbb{R}^L$ tels que $x > 0$.

[4]On notera notamment e le vecteur du simplexe dont toutes les coordonnées sont égales, $e := (\frac{1}{L} \cdots \frac{1}{L})$. D'autre part, $\mathcal{H}$ est l'hyperplan $e + e^\perp$ engendré par S.

$\mathbb{R}^L_+$, tandis qu'un système de prix strictement positifs sera un vecteur du sous-ensemble $S_{++} := \{p \in \mathbb{R}^L_{++} \mid \sum_{\ell=1}^L p_\ell = 1\}$ de $\mathbb{R}^L_{++}$.

1.1 Les entreprises

Les techniques de production maîtrisées par l'entreprise j sont représentées par un ensemble Y_j, sous-ensemble de $\mathbb{R}^L$. Un élément y_j de cet ensemble est un plan de production, vecteur qui résume l'activité productive en prenant comme coordonnées négatives les facteurs de production (inputs) et comme coordonnées positives les biens produits (outputs). Ces ensembles sont supposés vérifier une condition du type :

Hypothèse 1 (P) *Pour tout j,*

1. *Y_j est un sous-ensemble fermé et non vide de $\mathbb{R}^L$ contenant* 0;
2. $Y_j - \mathbb{R}^L_+ \subset Y_j$;
3. *si* [5] $(y_j) \in \prod_{j=1}^n \mathcal{A}Y_j$ *et* $\sum_{j=1}^n y_j \geq 0$ *alors pour tout j,* $y_j = 0$. *(voir (41)).*

Il est important de noter qu'aucune hypothèse de convexité n'est faite, ni sur les ensembles de production individuels, ni sur l'ensemble de production agrégé $\sum_{j=1}^n Y_j$. Les conditions de fermeture des ensembles de production et de libre disposition des excédents ($Y_j - \mathbb{R}^L_+ \subset Y_j$), impliquent que les ensembles de plans de production efficaces des entreprises $\{y_j \in Y_j \mid (y_j + \mathbb{R}^L_{++}) \cap Y_j = \emptyset\}$ coïncident avec les frontières [6] ∂Y_j de leurs ensembles de production et que la projection de ∂Y_j sur $e^\perp$ est un homéomorphisme (voir Bonnisseau et Cornet (8)), propriété grâce à laquelle on peut munir ∂Y_j d'une structure de variété. La condition asymptotique (3) garantira quant à elle que l'ensemble des allocations réalisables est borné.

La relation entre les choix de production de l'entreprise j et les prix de marché est formalisée par une règle de tarification. Une règle de tarification pour l'entreprise j est définie comme une correspondance ϕ_j de ∂Y_j dans S. Etant donné un $y_j \in \partial Y_j$, $\phi_j(y_j)$ doit être interprété comme l'ensemble des systèmes de prix jugés

[5] On note $\mathcal{A}X$ le cône asymptotique à X défini par $\mathcal{A}(X) = \cap_{k\geq 0}\Gamma^k$, où, pour tout $k \geq 0$, Γ^k désigne le plus petit cône convexe, fermé de sommet 0 contenant le sous-ensemble $\{x \in X \mid\| x \|\geq k\}$.

[6] Pour tout sous-ensemble X de $\mathbb{R}^L$, nous noterons $\mathrm{cl}\,X$, $\mathrm{int}\,X$, ∂X et $\mathrm{co}\,X$, respectivement, la fermeture, l'intérieur, la frontière et l'enveloppe convexe de X.

acceptables pour l'entreprise j lorsqu'elle met en oeuvre le plan de production y_j. Ces règles de tarification vérifient des conditions de régularité données par :

Hypothèse 2 (PR) *Pour tout j, ϕ_j est une correspondance semi-continue supérieurement*[7] *sur ∂Y_j à valeurs convexes, compactes et non vides dans S.*

Ce formalisme inclut naturellement le cadre classique où le comportement des entreprises est la maximisation du profit. En effet, la maximisation du profit peut être décrite par une règle de tarification :

$$MP_j(y_j) = \left\{ \ p \in S \ \middle| \ (\forall y'_j \in Y_j) : p \cdot y'_j \leq p \cdot y_j \ \right\}.$$

Cependant, l'usage d'une règle de tarification en lieu et place de l'écriture d'un problème de maximisation vise à la prise en compte des situations de rendements croissants où la maximisation du profit est fréquemment irréalisable.

Dans ce cas, la règle de tarification peut être vue comme une règle à proprement parler, fixant, par exemple, le mode de tarification d'un monopole public. La littérature s'intéresse notamment à la règle de tarification marginale, pour laquelle l'entreprise accepte les prix coïncidant avec ses coûts marginaux dans le sens généralisé donné par un cône normal de l'analyse non-lisse comme le cône de Clarke[8] (voir (18)) :

$$TM_j(y_j) = \left\{ \ p \in S \ \middle| \ p \in N_{Y_j}(y_j) \ \right\}.$$

Parmi les autres types de règles de tarification étudiées dans la littérature, on peut citer la tarification à profit nul ou l'échange volontaire[9] (voir Dehez et Drèze (23) et (24)), respectivement définis par :

$$\begin{aligned} PN_j(y_j) &= \left\{ \ p \in S \ \middle| \ p \cdot y_j = 0 \ \right\}, \\ EV_j(y_j) &= \left\{ \ p \in S \ \middle| \ (\forall y'_j \in Y_j) : (y'_j \leq y_j^+) \Rightarrow (p \cdot y'_j \leq p \cdot y_j) \ \right\}. \end{aligned}$$

[7]On notera s.c.s (resp s.c.i) pour semi-continue supérieurement (resp. inférieurement). Ces propriétés sont définies dans la section concernant la théorie du degré.

[8]Ici $N_{Y_j}(y_j)$ est le cône polaire du cône tangent de Clarke à Y_j en y_j, $T_{Y_j}(y_j)$, défini comme l'ensemble des vecteurs v de $\mathbb{R}^L$ tels que, pour toute suite $\{y_j^\nu\}$ à valeurs dans Y_j convergeant vers y_j et toute suite réelle $\{t^\nu\}$ à valeurs strictement positives convergeant vers 0, il existe une suite $\{v^\nu\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^L$ convergeant vers v telle que $y_j^\nu + t^\nu v^\nu \in Y_j$ pour tout ν.

[9]Pour tout vecteur $x = (x_\ell)$ de $\mathbb{R}^L$, on notera x^+ le vecteur de $\mathbb{R}^L$ dont les coordonnées valent $\max\{0, x_\ell\}$.

Ces dernières règles ont la particularité de vérifier l'hypothèse suivante, dite de pertes bornées, cruciale pour de nombreux résultats d'existence :

Hypothèse 3 (BL) *Pour tout j, il existe un nombre réel α_j tel que, pour tout $(p,(y_j)) \in S \times \prod_{j=1}^n \partial Y_j$ et tout $p \in \phi_j(y_j)$, $p \cdot y_j \geq \alpha_j$.*

La formalisation par règles de tarification induit naturellement une notion intermédiaire d'*équilibre de production*, situation dans laquelle toutes les entreprises jugent acceptable la combinaison système de prix, allocation de plans de production efficaces. Formellement, l'ensemble EP des équilibres de production est défini par :

$$EP = \left\{ \ (p,(y_j)) \in S \times \textstyle\prod_{j=1}^n \partial Y_j \ \middle| \ p \in \cap_{j=1}^n \phi_j(y_j) \ \right\}.$$

1.2 Les consommateurs

Chaque consommateur choisit de consommer une quantité positive ou nulle de chaque bien. Formellement, chaque consommateur choisit un vecteur x_i dans son ensemble de consommation $\mathbb{R}^L_+$, les coordonnées de x_i représentant les quantités de chaque bien que l'agent i consomme.

Les critères de choix d'un consommateur sont représentés par une fonction d'utilité u_i qui définit un ordre sur l'ensemble de consommation $\mathbb{R}^L_+$. Un plan de consommation $x_i \in \mathbb{R}^L_+$ étant préféré à un autre x_i' si $u_i(x_i) \geq u_i(x_i')$, strictement préféré si l'inégalité est stricte.

D'autre part, chaque agent possède une dotation initiale en biens, $\omega_i \in \mathbb{R}^L_+$ et perçoit une partie des profits ou compense une partie des pertes du secteur productif. Le montant de ce transfert est déterminé par une fonction de revenu r_i de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Cette formalisation abstraite des revenus des consommateurs prend en compte le cas d'une économie de propriété privée, dans laquelle le revenu du consommateur i est défini par $p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p \cdot y_j$, somme de la valeur de sa dotation initiale en biens $\omega_i \in \mathbb{R}^L$ et de ses parts θ_{ij} ($\sum_{i=1}^m \theta_{ij} = 1$ pour tout j) dans les profits $p \cdot y_j$ des entreprises.

Les caractéristiques des consommateurs sont supposées vérifier les conditions suivantes[10] (voir Debreu (22)) :

[10]Nous énonçons dans le corps du texte des hypothèses moins restrictives.

Hypothèse 4 (C) *Pour tout i,*

1. *u_i est quasi-concave et C^1 sur $\mathbb{R}^L_{++}$, continue sur $\mathbb{R}^L_+$.*
2. *u_i est strictement monotone ;*
3. *$\omega_i \in \mathbb{R}^L_{++}$;*
4. *$r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue et $\sum_{i=1}^m r_i((p \cdot y_j)) = \sum_{j=1}^n p \cdot y_j$.*

Etant donné un système de prix p et une allocation de plans de production efficaces $(y_j) \in \prod_{j=1}^n \partial Y_j$, le consommateur i dispose du revenu $p \cdot \omega_i + r_i((p \cdot y_j))$ et cherche à atteindre le niveau d'utilité le plus élevé possible. Son comportement peut dès lors être synthétisé par une correspondance de demande D_i : $S_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^L$ qui associe à un système de prix strictement positifs, p, à et une richesse strictement positive w, l'ensemble des paniers de consommation qui maximisent la fonction d'utilité dans l'ensemble de budget $B_i(p, w) := \{x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x_i \leq \omega\}$. Cette correspondance de demande a les propriétés suivantes (voir Debreu (22) et Florenzano (32)) :

Lemme A.1 *Sous l'hypothèse (C), on a pour tout i,*

1. *D_i est une correspondance s.c.s à valeurs convexes et compactes dans $\mathbb{R}^L_+$;*
2. *Pour tout $(p, w) \in S_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ et tout $x \in D_i(p, w)$, on a $p \cdot x = w$ (loi de Walras) ;*
3. *Si (p^n, w^n) est une suite dans $S_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ convergeant vers un élément (p, w) tel que $w > 0$ et $p \notin S_{++}$, on a $\|D_i(p_n, w_n)\| \to +\infty$ (condition au bord).*

2 L'équilibre de tarification générale

Les allocations réalisables de l'économie sont l'ensemble des plans de consommation $(x_i) \in (\mathbb{R}^L_+)^m$ et de production $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j$ tels que la consommation globale soit inférieure à la somme de la production et des ressources initiales. Soit : $\{((x_i), (y_j)) \in (\mathbb{R}^L_+)^m \times \prod_{j=1}^n Y_j \mid \sum_{j=1}^n x_i \leq \sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i\}$. Parmi ces allocations, on s'intéresse aux équilibres de tarification générale qui consistent en la donnée d'un système de prix, d'une allocation de plans de consommation et d'une allocation de plans de production efficaces telle que (a) l'offre égale la demande sur tous les marchés ; (b) les consommateurs maximisent leur utilité sous leur contrainte budgétaire ; (c) le prix est acceptable pour chaque entreprise étant donné son plan de production. Formellement, on définit l'équilibre de tarification générale comme suit.

Definition 1 *Un élément* $(\overline{p}, (\overline{x}_i), (\overline{y}_j))$ *de* $S \times (\mathbb{R}^L)^m \times (\mathbb{R}^L)^n$ *est un équilibre de tarification générale lorsque :*

(a) *pour tout* i, $\overline{x}_i$ *est un élément de la demande* $D_i(\overline{p}, \overline{p} \cdot \omega_i + r_i((\overline{p} \cdot \overline{y}_j))$ *;*

(b) *pour tout* j, $\overline{y}_j \in \partial Y_j$ *et* $\overline{p} \in \phi_j(\overline{y}_j)$ *;*

(c) $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$.

Cette notion d'équilibre comprend comme cas particuliers les concepts classiques (voir Debreu (22)) que sont l'équilibre d'une économie d'échange (lorsque tous les ensembles de production sont réduits à zéro et que les règles de tarification n'exercent pas de contraintes) , et l'équilibre concurrentiel avec production lorsque la règle de tarification est la maximisation du profit.

L'existence d'équilibre avec règle de tarification générale fait l'objet d'une importante littérature (voir Cornet (21)). Des résultats dans le cas de la tarification marginale ont été obtenus notamment par Kamiya (46), Bonnisseau et Cornet (9), Jouini (44), Vohra (59). Le cas des règles de tarification à pertes bornées fut d'abord étudié séparément, notamment par Dierker, Guesnerie et Neuefeind (28), Bonnisseau et Cornet (8), Dehez et Drèze (23) et (24), Jouini (45). Bonnisseau (4) propose une synthèse de ces deux types de résultats.

Dans l'ensemble de la littérature, l'hypothèse de survivance qui garantit que l'activité productive est capable de fournir à l'économie une richesse positive pour tout vecteur de ressources initiales supérieures aux ressources effectivement existantes, est cruciale. Des versions affaiblies ont été utilisées (voir notamment Bonnisseau et Jamin (12)), mais dans sa forme classique, elle s'énonce :

Hypothèse 5 (SA) *Pour tout* $\omega' \geq \omega$, *pour tout* $(p, (y_j)) \in EP$ *tel que* $\sum_{j=1}^n y_j + \omega' \geq 0$ *on a* $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \omega') > 0$.

Son pendant au niveau individuel est l'hypothèse de revenu qui garantit qu'à une allocation réalisable, chaque consommateur reçoit un revenu positif.

Hypothèse 6 (R) *Pour tout* $(p, (y_j)) \in S \times \prod_{j=1}^n Y_j$ *tels que* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i \geq 0$ *et* $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0$, *on a pour tout* i, $p \cdot \omega_i + r_i(p \cdot y_j) > 0$.

Il convient de noter qu'en l'absence de pertes, la satisfaction de ces deux hypothèses est garantie par la condition d'intériorité des dotations initiales.

B Le modèle d'équilibre général avec rendements croissants et externalités

La prise en compte d'externalités, interactions non-médiatisées par le marché, notamment celles liant l'activité économique et l'environnement, nécessite d'enrichir le modèle. Nous adoptons pour ce faire le formalisme introduit par Arrow (1) où l'environnement d'un agent est défini par l'ensemble des choix de consommation et de production des autres agents. Cette définition abstraite peut être liée à des externalités concrètes, comme la concentration atmosphérique de dioxyde de carbone, en introduisant explicitement les paramètres environnementaux comme fonctions des choix des agents (comme par exemple nous le faisons au chapitre 2).

1 Les entreprises

L'environnement d'une entreprise j, est défini par un vecteur $((x_i), (y_{-j})) \in (\mathbb{R}^L)^m \times (\mathbb{R}^L)^{n-1}$ où (x_i) représente les choix de consommation faits par chacun des consommateurs et $(y_{-j}) = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)$ représente les choix de production de toutes les entreprises autres que j. Cet environnement influence les possibilités de production ainsi que le comportement de tarification de l'entreprise j.

Ainsi, les techniques de production de l'entreprise j sont représentées par une correspondance $Y_j : (\mathbb{R}^L)^m \times (\mathbb{R}^L)^{n-1} \to \mathbb{R}^L$ qui associe à l'environnement $((x_i), (y_{-j}))$, l'ensemble des plans de production, $Y_j((x_i), (y_{-j}))$, que l'entreprise j peut mettre en oeuvre étant donné ces influences extérieures.

De même, la règle de tarification de l'entreprise j est donnée par une correspondance ϕ_j définie sur *Graph* $\partial Y_j := \{(((x_i), (y_{-j})), y_j) \in (\mathbb{R}^L)^{m+n-1} \times \mathbb{R}^L \mid y_j \in \partial Y_j((x_i), (y_{-j}))\}$ et à valeurs dans le simplexe S, qui associe à un environnement $((x_i), (y_{-j}))$ et à un plan de production efficace dans cet environnement, $y_j \in \partial Y_j((x_i), (y_{-j}))$, l'ensemble des prix acceptables pour l'entreprise

$\phi_j(((x_i),(y_{-j})),y_j)$.

Dans ce cadre, les hypothèses sur la production sont naturellement étendues à[11] :

Hypothèse 7 (EX-P)

1. *Pour tout* j, Y_j *est une correspondance semi-continue-inférieurement à graphe fermé ;*
2. *Pour tout* j, *pour tout* [12] $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, $Y_j(E) - \mathbb{R}^L_+ \subset Y_j(E)$;
3. *Pour tout* $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, $\mathcal{A}(\prod_{j=1}^{n} Y_j(E)) \cap \{(y_j) \in (\mathbb{R}^L)^n \mid \sum_{j=1}^{n} y_j \geq 0\} = \{0\}$.

Hypothèse 8 (EX-PR)

Pour tout j , ϕ_j *est une correspondance s.c.s à valeurs convexes, compactes, non-vides, de Graph* ∂Y_j *dans* S.

Finalement, la notion d'équilibre de production dépend elle-aussi de l'environnement. On définit :

Definition 2 *Un élément* $(p,(y_j)) \in S \times \prod_{j=1}^n \partial Y_j(E)$ *est un équilibre de production pour l'environnement* $E \in \mathbb{R}^{L(m+n)}$ *si pour tout* j, $p \in \phi_j(E, y_j)$. *On note* $EP(E)$ *l'ensemble de ces équilibres de production.*

2 Les consommateurs

Symétriquement l'environnement d'un consommateur i est défini par un vecteur $((x_{-i}),(y_j)) \in (\mathbb{R}^L)^{m-1} \times (\mathbb{R}^L)^n$ où $(x_{-i}) = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m)$ représente les choix de consommation faits par chacun des consommateurs autres que i et (y_j) les choix de production faits par chaque entreprise. Nous nous limitons, dans le cadre de cette thèse, à des effets externes portant sur les préférences, si

[11]Dans cette introduction, on préfixe par EX les hypothèses portant sur les caractéristiques des agents en présence d'externalités ; cette convention n'est pas adoptée dans le corps du texte.

[12]On note $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$ pour désigner de manière générique un environnement. A charge pour le lecteur d'y substituer $((x_i),(y_{-j}))$ ou $((x_{-i}),(y_j)))$ de manière appropriée.

bien que l'ensemble de consommation de chaque consommateur reste $\mathbb{R}^L_+$, tandis que l'utilité est désormais une fonction $u_i : (\mathbb{R}^L)^{m-1+n} \times \mathbb{R}^L_+$ qui donne l'utilité $u_i(((x_{-i}),(y_j)),x_i)$ que l'agent i retire de la consommation d'un panier de biens $x_i \in \mathbb{R}^L_+$ dans l'environnement $((x_{-i}),(y_j)) \in (\mathbb{R}^L)^{m-1+n}$. Les hypothèses sur les caractéristiques des consommateurs dans l'économie avec externalités sont du type :

Hypothèse 9 (EX-C) *Pour tout i :*

1. u_i *est continue ;*
2. *pour tout* $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, $u_i(E,\cdot)$ *est quasi-concave ;*
3. *pour tout* $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, $u_i(E,\cdot)$ *est strictement monotone.*
4. r_i *est continue et pour tout* $(p,(y_j)) \in S \times (\mathbb{R}^L)^n$, *on a* $\sum_{i=1}^m r_i((p \cdot y_j)) = p \cdot \sum_{j=1}^n y_j$.

La demande D_i du consommateur i dépend désormais du prix p, de sa richesse w, mais aussi de son environnement $((x_{-i}),(y_j))$. Précisément $D_i : (\mathbb{R}^L)^{m+n-1} \times S_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^L$ est la correspondance qui associe à un environnement $((x_{-i}),(y_j))$, à un système de prix strictement positifs, p, et à une richesse strictement positive w, l'ensemble des paniers de consommation qui maximisent l'utilité de la consommation (étant donné l'environnement) $u_i(((x_{-i}),(y_j)),\cdot)$ dans l'ensemble de budget $B_i(p,w) := \{x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x_i \leq \omega\}$.

3 Equilibre de tarification générale avec externalités.

Les choix individuels sont désormais liés par des contraintes de compatibilité environnementales :

Definition 3 *L'ensemble des plans de consommation et de production satisfaisant les contraintes environnementales est* $\{((x_i),(y_j)) \in (R^L)^m \times (\mathbb{R}^L)^n \mid \forall i,\ x_i \in \mathbb{R}^L_+ \text{ et } \forall j,\ y_j \in Y_j((x_i),(y_{-j}))\}$.

Ces contraintes de compatibilité environnementale viennent s'ajouter aux conditions standards à l'équilibre. Si bien qu'un équilibre de l'économie de tarification générale avec externalités est défini comme suit.

Definition 4 *Un élément* $(\overline{p}, (\overline{x}_i), (\overline{y}_j))$ *de* $S \times (\mathbb{R}^L)^m \times (\mathbb{R}^L)^n$ *est un équilibre de tarification générale avec externalités lorsque :*

(a) pour tout i, $\overline{x}_i$ *est un élément de la demande* $D_i(((\overline{x}_{-i}), (\overline{y}_j)), \overline{p}, r_i((\overline{p} \cdot \overline{y}_j))$;

(b) pour tout j, $\overline{y}_j \in \partial Y_j((\overline{x}_i), (\overline{y}_{-j}))$ *et* $\overline{p} \in \phi_j(((\overline{x}_i), (\overline{y}_{-j})), \overline{y}_j)$ *;*

(c) $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$.

L'existence d'équilibre dans des économies avec externalités a été prouvé par Laffont (48) dans le cadre concurrentiel, par Bonnisseau (6) dans le cadre de tarifications générales à pertes bornées et par Bonnisseau et Médecin (13) dans le cadre de la tarification marginale.

C Existence d'équilibres et théorie du degré

Parmi les nombreux résultats d'existence d'équilibre de tarification générale cités précédemment, nous présentons succinctement ceux de Jouini qui utilisent la théorie du degré pour les correspondances s.c.s développée par Cellina et Lasota (16). En effet, ces résultats et ces méthodes sont à la source des résultats d'existence que nous établissons dans les deux premiers chapitres. Auparavant, nous rappelons les principales propriétés du degré de Cellina et Lasota et les principes de leur utilisation dans les preuves d'existence d'équilibre.

1 Théorie de degré pour les correspondances semi-continues supérieurement

Definition 5 *Soit* X *et* Y *deux espaces métriques, et soit* F *une correspondance de* X *dans* Y *. On dit que* F *est :*

– *semi-continue supérieurement si pour tout ouvert* U *de* Y, *l'ensemble* $\{x \in X \mid T(x) \subset U\}$ *est un ouvert de* X *,*

– *semi-continue inférieurement si pour tout ouvert* U *de* Y *, l'ensemble* $\{x \in X \mid T(x) \cap U \neq \emptyset\}$ *est un ouvert de* X.

La théorie du degré pour les correspondances semi-continues supérieurement développée par Cellina et Lasota (16) (et indépendamment par Granas (35)) est une extension de la théorie du degré topologique. Etant donné une correspondance F semi-continue supérieurement à valeurs convexes et compactes, il existe pour tout $\epsilon > 0$ une fonction continue f_ϵ dont le graphe est contenu dans un ϵ-voisinage du graphe de F. En approximant f_ϵ par une fonction lisse, on peut définir le degré de F comme le degré de ces approximations lisses pour ϵ suffisamment petit (voir Cellina (16), Giraud (34)). Formellement, on obtient la caractérisation axiomatique suivante ((voir Jouini (44)).

Etant donné l'ensemble C des (F, X, Y, y) où :

1. X et Y sont deux variétés orientées de même dimension contenues dans un espace euclidien ;
2. $F : X \to Y$ est une correspondance semi-continue supérieurement à valeurs convexes, compactes, non-vides ;
3. $y \in Y$ et $F^{-1}(y) := \{x \in X \mid y \in F(x)\}$ est un sous-ensemble compact de X.

Théorème C.1 *Il existe une unique fonction, le degré, $deg : C \to \mathbb{Z}$ telle que :*

1. *(Normalisation) $deg(Id, Y, Y, y) = 1$*
2. *(Localisation) Si $F^{-1}(y) \subset U$ et $F(U) \subset V$ où U et V sont des sous-ensembles ouverts de X et Y respectivement, alors :*
$$deg(F, X, Y, y) = deg(F_{|U}, U, V, y)$$
3. *(Additivité) Si $(G_i)_{i=1\cdots n}$ est une partition finie de X par des sous-ensembles ouverts telle que pour tout i, $(F_{|G_i}, G_i, Y, y) \in C$ alors*
$$deg(F, X, Y, y) = \sum_{i=1}^{n} deg(F_{|G_i}, G_i, Y, y)$$
4. *(Invariance par homotopie) Si (F_t, X, Y, y) est une famille d'éléments de C telle que pour tout sous-ensemble compact K de X l'application $t \to GraphF_t \cap (K \times Y)$ soit continue par rapport à la distance de Hausdorff sur $K \times Y$ et telle que $\cup_{t\in[0,1]} F_t^{-1}(y)$ soit un sous-ensemble compact de X. Alors :*
$$deg(F_0, X, Y, y) = deg(F_1, X, Y, y)$$

5. *(Continuité) Si il existe un voisinage compact et connexe $K \subset Y$ d'un élément y^* de Y tel que $F^{-1}(K) := \{x \in X \mid F(x) \cap K \neq \emptyset\}$ soit compact alors $deg(F, X, Y, y)$ est constant sur K.*
6. *(Règle de composition) Si (F, X, Y, y) et (G, Y, Z, z) sont deux éléments de C tels que Y est connexe et que pour tout compact K de Y, $F^{-1}(K)$ est compact, alors*

$$deg(G \circ F, X, Z, z) = deg(F, X, Y, y) \cdot deg(G, Y, Z, z)$$

où pour tout x, $G \circ F(x) := cl\ co\{\cup_{y \in F(x)} G(y)\}$
7. *(Non-trivialité) Si $deg(F, X, Y, y) \neq 0$ alors $F^{-1}(y) \neq 0$.*

2 Existence d'équilibre et théorie du degré

L'approche par le degré pour les preuves d'existence d'équilibre a été développé principalement par Dierker (voir (26) et (27)), Kehoe (voir (47)) et Mas-Colell (voir (51)).

Dans une économie d'échange, l'existence d'un équilibre se ramène à l'existence d'un zéro pour la correspondance d'excès de demande $Z : S \to \mathbb{R}^L$ défini par $Z(p) := \sum_{i=1}^m D_i(p, p \cdot \omega_i) - \sum_{i=1}^m \omega_i$, qui fait la différence entre la somme des demandes et la somme des ressources disponibles. En utilisant la loi de Walras (propriété 2 de la demande dans le lemme 1) qui annonce une équation surnuméraire, le problème peut se réduire à l'existence d'un zéro pour la correspondance $proj_{e^\perp} Z(p)$. On est dès lors dans le cadre d'application de la théorie du degré. La condition au bord pour la demande (propriété 3 du lemme 1) est une condition tangentielle pour $proj_{e^\perp} Z(p)$ qui implique que cette correspondance est homotope à l'identité, ce qui assure que son degré est non nul grâce à la propriété d'invariance par homotopie du degré (voir Bonnisseau (7)). La non-trivialité implique alors l'existence d'équilibres.

Dans une économie avec règles de tarifications générales, Jouini (44) et (45) montre que les équilibres au sens de la définition 1 coïncident avec les zéros de la correspondance G définie sur l'ouvert

$$U := \{(y_j), p, (\omega_i) \in \prod_{j=1}^n \partial Y_j \times S_{++} \times \mathbb{R}^{Lm} \mid p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0\}$$

et à valeurs dans $(e^\perp)^n \times e^\perp \times \mathbb{R}^{Lm}$ définie par

$G((y_j), p, (\omega_i)) :=$

$$(\prod_{j=1}^{n}(\phi_j(y_j) - p), proj_{e^\perp} \sum_{i=1}^{m} D_i(p, \tilde{r}_i((p \cdot y_j)) + p \cdot \omega_i) - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i=1}^{m} \omega_i, (\omega_i))$$

et calcule explicitement le degré de cette correspondance :

Théorème C.2 (Théorème 5.1 **dans Jouini (44))** *Sous les hypothèses (P), (PR),(C),(SA),(R) et (BL) le degré de* G *est* $(-1)^{L-1}$.

Théorème C.3 (Appendice à Jouini (45)) *Sous les hypothèses (P), (PR), (C), (SA), (R) et si chaque producteur suit la règle de tarification marginale donnée par le cône normal de Clarke, le degré de* G *est* $(-1)^{L-1}$.

La propriété de non-trivialité du degré fait de l'existence d'équilibres un corollaire immédiat de ces résultats. Quant à la méthode de preuve, elle consiste à se ramener par des homotopies successives à des correspondances dont on sait calculer le degré. En ce qui concerne la composante de la correspondance liée à l'équilibre sur le marché des biens, on peut utiliser des arguments similaires à ceux valables dans une économie d'échange, mais en ajoutant à la condition au bord sur la demande l'hypothèse de survivance qui garantit que la richesse globale reste positive même quand le prix tend vers la frontière du domaine. En ce qui concerne les règles de tarification, si elles sont à pertes bornées, on peut les modifier afin de les rendre homotopes à un homéomorphisme sur $e^\perp$. Pour les règles de tarification marginale, il convient d'utiliser les résultats de Bonnisseau (4) pour se ramener au cas précédent.

Quant aux économies avec externalités, c'est l'objet du premier chapitre de cette thèse que d'y établir des résultats analogues.

D Pareto optimalité avec rendements croissants et externalités.

Externalités et rendements croissants sont deux sources d'inefficacité du comportement concurrentiel, au sens où un équilibre concurrentiel, si il existe, n'est dans ce cadre généralement pas Pareto optimal.

En présence de rendements croissants, Guesnerie (38) montre que tout optimum de Pareto peut-être décentralisé comme équilibre de tarification marginale en utilisant le cône normal de Dubovickii-Miljutin (30). Il formalise ainsi la règle énoncée par Hotelling (40).

Dans une économie avec externalités, l'équilibre concurrentiel est généralement sous-optimal car les prix des biens par rapport auxquels les entreprises choisissent leurs plans de production ne prennent pas en compte les coûts des effets externes. Ainsi, à l'équilibre, les coûts marginaux de production individuels différent du coût marginal agrégé avec internalisation des externalités. Arrow (1) diagnostique la situation de sous-optimalité d'une économie avec externalités comme un problème de marchés manquants et propose comme solution une forme généralisé du théorème de Coase (19). Dans une économie avec externalités entre producteurs et rendements décroissants (cas particulier du modèle du premier chapitre), Arrow définit l'externalité comme une notion relative : l'influence de l'utilisation du bien h par l'entreprise j sur l'entreprise k. Pour rétablir l'optimalité, Arrow propose l'ouverture de marchés pour ces effets externes : lorsqu'un producteur j produit une quantité $(y_j)_\ell$ de bien ℓ, il émet simultanément un effet externe $(y_j)_\ell$ pour tous les autres producteurs et doit donc acheter le droit d'émettre cet effet externe à chaque producteur k au prix $(p_{j,k})_\ell$. Le concept de solution proposé par Arrow nécessite donc l'ouverture de $L \times n \times (n-1)$ marchés, un par bien et par paire d'agents distincts. Il obtient ainsi un second théorème du bien-être pour des économies avec externalités. Ce type de solution peut être étendu à des externalités entre consommateurs et producteurs, comme dans Laffont (48). On assiste dans ce cas à l'ouverture de $L \times (n+m) \times (n+m-1)$ nouveaux marchés. Néanmoins, la réalisation d'un équilibre concurrentiel dans ce cadre est problématique, étant donné que les marchés d'effets externes sont bilatéraux. D'autre part Starret (54) souligne la présence de non-convexités « fondamentales » dans le modèle d'Arrow, une entreprise pouvant vendre une quantité infinie d'effets externes quitte à renoncer à produire elle-même. Une alternative est proposée par Bonnisseau (5) qui étend l'utilisation de la tarification marginale aux économies avec marchés d'effets externes et propose une caractérisation des optima de Pareto dans ce cadre qui peut s'interpréter comme un second théorème du bien-être dans une économie avec marchés d'effets externes et rendements croissants.

Une autre branche de la littérature, principalement développée par Boyd et Conley (14), Conley et Smith (20), définit les externalités par leurs caractéristiques physiques, et considère l'ouverture de marchés de droits , du type EUETS, pour ces externalités physiques . Dans ce cadre, les optima de Pareto sont décentralisées comme des équilibres de Lindhal (voir Lindhal (49) et Foley (33)) où les agents utilisent les droits en tant que bien public.

E Une note sur le degré des économies de production avec externalités

L'objet du premier chapitre de cette thèse est le calcul explicite du degré d'une correspondance caractérisant les équilibres de tarification générale (au sens de la définition 3) d'une économie avec externalités.

Ce calcul permet d'obtenir des résultats d'existence d'équilibres. Ces derniers n'étendent ni ne généralisent les résultats de Bonnisseau (6) et Bonnisseau-Médecin (13), ils leurs sont simplement complémentaires. En effet, alors que l'approche de ces auteurs consiste à imposer des conditions sur l'ensemble des allocations satisfaisant les contraintes de compatibilité environnementales, nous imposons les conditions suffisantes de Jouini (44) ou (45) pour l'existence d'équilibre à une sous-économie où l'environnement est fixé.

Nos résultats peuvent dès lors être vus comme énonçant que l'existence d'équilibre est stable par rapport à l'introduction d'effets externes. Résultat utile quand on cherche à comparer des économies avec ou sans effets externes ou quand la complexité de ces derniers rend difficile la détermination de l'ensemble des allocations satisfaisant les contraintes de compatibilité environnementale.

Cependant, l'intérêt principal du résultat dans le cadre de cette thèse, est que les propriétés d'invariance du degré permettent d'étudier facilement des perturbations de l'économie telle l'ouverture d'un marché de droits analysée dans le second chapitre.

Notons enfin que notre résultat a pour corollaires immédiats, non-étudiés ici, des formules de l'indice pour des économies régulières avec externalités, qui permettent à leur tour d'affirmer l'unicité où la finitude du nombre d'équilibres.

1 Caractérisation des équilibres

Nous étudions la correspondance F_1 définie sur un ouvert[13] U de $\mathcal{H} \times (e^{\perp})^n \times \mathbb{R}^{Lm} \times \mathbb{R}^{L(m+n)}$ et à valeurs dans cet ensemble, donnée par :

[13]Pour une définition explicite de U voir le chapitre 1.

$F_1(p,(s_j),(\omega_i),(x_i),(y_j)) =$

$$\left(\begin{array}{c} proj_{\mathcal{H}}(\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m \omega_i), \\ (\phi_j(E,\Lambda_j(E,s_j)) - p), \\ (\omega_i),(x_i - Q_i(E,p,(s_j),(\omega_i))),(y_j - \Lambda_j(E,s_j)) \end{array}\right)$$

où pour simplifier les notations on note de manière générique E, l'environnement d'un agent (à remplacer selon les cas par $((x_i),(y_{-j}))$ ou par $((x_{-i}),(y_j))$ et où on a introduit pour des raisons techniques une quasi-demande pour des revenus auxiliaires $Q_i(E,p,(s_j),(\omega_i))$, laquelle coïncide avec la demande $D_i(E,p,p\cdot\omega_i + r_i((p\cdot y_j))$ lorsque les revenus sont strictement positifs. D'autre part, pour représenter les choix de production on utilise l'application Λ_j qui définit pour chaque environnement un homéomorphisme entre $e^\perp$ et l'ensemble des productions efficaces ∂Y_j et associe donc à tout élément s_j de $e^\perp$ un plan de production efficace.

Sous des hypothèses faibles (ne portant que sur les allocations réalisables) de survivance[14] :

Hypothèse 10 **($SA(\omega)$)** *Pour tout* $(p,(x_i),(y_j)) \in S\times\prod_{i=1}^m(\mathbb{R}_+^L)\times\prod_{j=1}^n \partial Y_j((x_i),(y_{-j}))$ *tel que* $(p,(y_j)) \in EP((x_i),(y_j))$ *et* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i \geq 0$*, on a* $p\cdot(\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0$.

et de revenu :

Hypothèse 11 **($R(\omega)$)** *Pour tout* $(p,(x_i),(y_j)) \in S\times\prod_{i=1}^m(\mathbb{R}_+^L)\times\prod_{j=1}^n \partial Y_j((x_i),(y_{-j}))$ *tel que* $(p,(y_j)) \in EP((x_i),(y_j))$*,* $p \in S_{++}$ *et* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i \geq 0$*, on a* $p\cdot\omega_i + r_i((p\cdot y_j)) > 0$.

cette correspondance caractérise les équilibres de tarification générale avec externalités.

Proposition 1 *Sous les hypothèses* $R(\omega)$ *et* $SA(\omega)$*, un élément* $(p,(s_j),\omega,(x_i),(y_j))$ *appartient à* $F_1^{-1}(e,0,\omega,0,0)$ *si et seulement si* $(p,(x_i),(y_j))$ *est un équilibre au sens de la définition 3 et* $s_j = proj_{e^\perp}(y_j)$ *pour tout* j.

[14]Cette hypothèse est vérifiée en particulier lorsqu'au moins une des règles de tarification est à valeurs strictement positives et qu'aucun équilibre de production, $(p,(y_j))$, n'autorise une destruction complète des ressources (c'est à dire est tel que $\sum_{j=1}^n y_j + \omega = 0$).

2 Lien avec une économie à environnement fixé

Le calcul du degré de F_1 est basé sur la remarque qu'en fixant l'environnement à une valeur arbitraire E_0, on peut se ramener à une économie sans externalité du type étudié dans la section C. En effet, on peut définir un équilibre à environnement fixé égal à E_0 comme [15] :

Definition 6 *Un équilibre de l' économie pour l'environnement E_0 est un élément $(\overline{p}, (\overline{x}_i), (\overline{y}_j)) \in S \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}_+^L \times \prod_{j=1}^n Y_j(E_0)$ tel que :*

1. *Pour tout i, $\overline{x}_i \in D_i(E_0, \overline{p}, \overline{p} \cdot \omega_i + \tilde{r}_i((\overline{p} \cdot \overline{y}_j))$*
2. *Pour tout j, $\overline{y}_j \in \partial Y_j(E_0)$ et $\overline{p} \in \phi_j(E_0, \overline{y}_j)$*
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \sum_{i=1}^m \omega_i$

En postulant l' hypothèse de survivance suffisante pour appliquer les théorèmes $C.2$ et $C.3$ de Jouini dans ce cadre :

Hypothèse 12 **($SSA(E_0, \omega)$)** *Pour tout $\omega' \geq \omega$, pour tout $(p, (y_j)) \in EP(E_0)$ tel que $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i' \geq 0$, on a $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i') > 0$.*

on montre que le degré de la correspondance G_{E_0} caractérisant ces équilibres, analogue de la correspondance G de la section C, est égal à $(-1)^{L-1}$:

Proposition 2 *Sous les hypothèses $(EX-P)$, $(EX-PR)$, $(EX-C)$, $SSA(E_0, \omega)$ et si pour tout j, $\phi_j(E_0, .)$ est à pertes bornées ou coïncide pour tout j avec la règle de tarification marginale on a ,*

$$deg(G_{E_0}, (e, 0, \omega)) = (-1)^{L-1}.$$

Finalement, sous une hypothèse extrêmement faible de non-gaspillage des ressources,

Hypothèse 13 **($SA_0(E, \omega)$)** *Pour tout $(p, (y_j)) \in EP(E)$ tel que $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i \geq 0$, on a $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i \neq 0$.*

[15] $\tilde{r}_i$ désigne ici des revenus auxiliaires introduits pour des raisons techniques. A l'équilibre, ils ne diffèrent pas des revenus originaux.

on montre qu'il existe une homotopie préservant le degré entre F_1 et G_{E_0}, si bien que :

Lemme E.1 *Si les hypothèses $(EX-P)$, $(EX-PR)$, (C), $SA(\omega)$, $SA(E_0,\omega)$ et pour tout*[16] $E \in K^{m+n}$ $SA_0(E,\omega)$ *sont satisfaites, alors :*

$$deg(G_{E_0},(e,0,\omega)) = deg(F_1^{E_0},(e,0,\omega,0,0))$$

3 Existence d'équilibres avec tarification générale et externalités.

On obtient comme corollaires l'existence d'équilibres de tarifications générales dans une économie avec externalités et rendements croissants :

Corollaire E.1 *Si les hypothèses (EX-P), (EX-PR), (EX-C), (S(ω)) et (R(ω)) sont satisfaites, et si il existe un environnement $E_0 \in intK^{m+n}$ tel que l'hypothèse $SSA(E_0,\omega)$ soit satisfaite et que les règles de tarifications, $\phi_j(E_0,\cdot)$, soient à pertes bornées, alors, le degré de la correspondance d'équilibre F_1 à $(e,0,\omega,0,0)$ est égal à $(-1)^{L-1}$ et il existe un équilibre au sens de la définition 3.*

où l'hypothèse $S(\omega)$ correspond à la conjonction des hypothèses (SA(ω)) et (SA$_0(E,\omega)$ pour tout environnement dans K^{m+n}.

Ce résultat s'applique en particulier au cas concurrentiel lorsque les dotations initiales satisfont une condition d'intériorité (résultat déjà présent dans Laffont (48)) :

Corollaire E.2 *Si les hypothèses (EX-P) et (EX-C) sont satisfaites, que pour tout i $(\omega_i) \in \mathbb{R}^L_{++}$, que les correspondances de production sont à valeurs convexes contenant 0 et que les producteurs maximisent leurs profits, alors le degré de la correspondance d'équilibre F_1 à $(e,0,\omega,0,0)$ est égal à $(-1)^{L-1}$ et il existe un équilibre au sens de la définition 3.*

[16] Dans ce qui suit, K est un compact de R^L contenant l'ensemble des allocations atteignables dans son intérieur.

Enfin, en ce qui concerne la tarification marginale :

Corollaire E.3 *Si les hypothèses (EX-P), (EX-PR), (EX-C), $S(\omega)$ et $R(\omega)$ sont satisfaites, que les règles de tarification coïncident avec la tarification marginale pour tout environnement, et qu'il existe un environnement $E_0 \in intK^{m+n}$ tel que l'hypothèses $SSA(E_0, \omega)$ soit satisfaite, alors, le degré de la correspondance d'équilibre F_1 à $(e, 0, \omega, 0, 0)$ est égal à $(-1)^{L-1}$ et il existe un équilibre de tarification marginale au sens de la définition 3.*

F Existence d'équilibre après l'ouverture d'un marchés de droits

Dans le second chapitre, on s'intéresse aux conséquences de la création d'un marché de droits sur l'existence d'équilibres dans une économie avec un seul type d'externalité. Pour traduire la dynamique implicitement présente dans la notion de création d'un marché nous formulons le problème sous la forme : « Quelles conditions garantissent l'existence d'un équilibre dans l'économie après l'ouverture d'un marché de droits sachant que l'économie était initialement à l'équilibre, que les conditions suffisantes pour l'existence d'un équilibre étaient satisfaites avant l'ouverture de ce marché ? »

Cette problématique est assez originale en théorie de l'équilibre général où on considère généralement, comme le souligne l'hypothèse classique de marchés complets, que l'ensemble des marchés est fixé initialement. Elle commande également une nouvelle approche pour l'établissement de résultats d'existence. En effet il semble inapproprié de postuler des hypothèses portant directement sur les caractéristiques des agents dans l'économie élargie. Notamment, certaines hypothèses classiques comme la libre-disposition, n'ont aucune raison d'être vérifiées étant donnée la présence d'effets externes. Notre approche est donc d'assurer l'existence d'un équilibre dans l'économie initiale puis de décrire comment les entreprises, et accessoirement les consommateurs, doivent adapter leur comportement après l'ouverture du marché de droits afin qu'un nouvel équilibre puisse être atteint. Au cours de ce processus, l'évolution du prix du droit est déterminante.

Ce résultat d'existence s'applique notamment aux économies avec permis d'émission de gaz à effets de serre et peut dans ce cadre être interprété comme assurant que l'économie peut surmonter l'ouverture d'un tel marché sans modification trop importante de son fonctionnement.

1 Economie initiale

On considère une économie initiale, cas particulier du modèle du premier chapitre, où tous les effets externes peuvent être résumés par un paramètre réel (implicitement les émissions de dioxyde de carbone). Cet effet externe est causé par les entreprises et n'affecte que les consommateurs.

Précisément, chaque entreprise en produisant un plan $y_j \in Y_j$ cause simultanément une dégradation $f_j(y_j)$ de l'état de l'environnement. Si bien que quand l'ensemble des plans de productions est $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j$ l'état de l'environnement est $\sum_{j=1}^n f_j(y_j)$.

La « fonction de pollution » f_j est supposée telle que :

Hypothèse 14 (PF) *Pour tout j, $f_j : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}_-$ est différentiable, à valeurs dans $\mathbb{R}_-$ et vérifie $f_j(0) = 0$.*

Les consommateurs sont quant à eux sensibles à l'état de l'environnement. Leur fonction d'utilité u_i définie sur $\mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}$ associe un niveau de satisfaction $u_i(x_i, \tau)$ à la consommation d'un panier de biens x_i dans un environnement dont l'état est τ (dans les faits τ est toujours égal à $\sum_{j=1}^n f_j(y_j)$).

Transcrits dans ce cadre, les résultats du chapitre 1 garantissent l'existence d'un équilibre, au sens de la definition 3, c'est à dire quand il existe uniquement des marchés pour les biens traditionnels :

Théorème F.1 *Sous les hypothèses* [17] *(P), (PF), (EX-C), (PR), (SPR*[18]*), (SA) et (R), il existe un équilibre dans l'économie initiale.*

2 Marché de droits.

On s'intéresse alors à l'ouverture d'un marché de droits du type EUETS. Une « autorité environnementale » distribue une certaine quantité de droits de pollution aux agents économiques et oblige simultanément, grâce à ses prérogatives légales, chaque entreprise à utiliser comme input dans son processus de production une quantité de droits au moins égale à son niveau de pollution. L'allocation initiale des droits, en quantité $(a_i) \in \mathbb{R}_+^m$ parmi les consommateurs et $(a_j) \in \mathbb{R}_+^n$ parmi les producteurs, n'étant pas nécessairement efficace, les agents peuvent avoir intérêt à s'échanger des droits. Ceci entraîne l'ouverture d'un marché de droits et des modifications des possibilités de choix et du comportement des agents individuels.

[17] On postule dans ce cadre l'hypothèse (EX-C) car les consommateurs subissent une externalité. Ce n'est pas le cas des entreprises auxquelles on applique donc les hypothèses « classiques. »

[18] l'hypothèse (SPR) non rappelée ici énonce que les règles de tarification sont à pertes bornées ou coïncident avec la tarification marginale (voir chapitre 2.)

L'ensemble de production de l'entreprise j devient

$$Z_j := \{(y_j, t_j) \in Y_j \times \mathbb{R}_- \mid t_j \leq f_j(y_j)\}$$

et cette dernière adopte une nouvelle règle de tarification $\psi_j : \partial Z_j \to \mathbb{R}^{L+1}$ supposée vérifiée l'équivalent[19] (PR′) de l'hypothèse (PR). Si les entreprises sont seules autorisées à acheter des droits, on peut définir une notion d'équilibre privé avec marchés de droits :

Definition 7 *Un équilibre privé de l'économie élargie est un élément* $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}_i), (\overline{y}_j, \overline{t}_j))$ *de* $(S^L \times \mathbb{R}_+) \times (\mathbb{R}^L)^m \times \prod_{j=1}^n \partial Z_j$ *tel que :*

1. *pour tout* i, $\overline{x}_i$ *maximise* $u_i(\cdot, \sum_{j=1}^n \overline{t}_j)$ *dans l'ensemble de budget* $B_i(\overline{p}, (\overline{y}_j)) := \{x_i \in \mathbb{R}^\ell_+ \mid \overline{p} \cdot x_i \leq (\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\omega_i, a_i) + r_i((\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\overline{y}_j, \overline{t}_j + a_j))\}$;
2. *pour tout* j, $(\overline{p}, \overline{q}) \in \psi_j(\overline{y}_j, \overline{t}_j)$;
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \sum_{i=1}^m w_i$;
4. $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n \overline{t}_j = 0$.

Tandis que si les consommateurs ont eux aussi accès au marché et utilisent le droit comme un bien public dont la vertu est de réduire la pollution, on définit l'équilibre comme :

Definition 8 *Un équilibre public de l' économie élargie est un élément* $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, \overline{t}_j))$ *de* $(S^L \times \mathbb{R}_+) \times (\mathbb{R}^{L+1}_+)^m \times \prod_{j=1}^n \partial Z_j$ *tel que :*

1. *pour tout* i, $(\overline{x}_i, \overline{s}_i)$ *maximise* $u_i(x_i, -(\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{i=1}^m a_i) + (\sum_{k \neq i} s_k + s_i))$ *dans l'ensemble de budget* $B_i(\overline{p}, (\overline{y}_j)) := \{(x_i, s_i) \in \mathbb{R}^{L+1}_+ \mid (\overline{p}, \overline{q}) \cdot (x_i, s_i) \leq (\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\omega_i, a_i) + r_i((\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\overline{y}_j, \overline{t}_j + a_j))\}$ *;*
2. *pour tout* j, $(\overline{p}, \overline{q}) \in \psi_j(\overline{y}_j, \overline{t}_j)$ *;*
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \sum_{i=1}^m w_i$ *;*
4. $\sum_{i=1}^m \overline{s}_i = \sum_{j=1}^n \overline{t}_j + \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j$.

[19] Pour l'énoncé exact voir le chapitre 3.

3 Comportement des entreprises et existence d'équilibres dans l'économie avec droits

A partir de l'exemple de la tarification marginale, donnée dans l'économie initiale par le cône normal de Clarke à Y_j,

$$\phi_j(y_j) := N_{Y_j}(y_j)$$

et obtenue dans l'économie avec droits par le biais d'une perturbation proportionnelle au prix du droit :

$$\psi_j(y_j, f_j(y_j)) = (N_{Y_j}(y_j), 0) - \{\lambda(\nabla f_j(y_j), 1)\}_{\lambda \geq 0},$$

on est assez naturellement conduit à identifier les équilibres de l'économie initiale avec les équilibres privés de l'économie élargie pour lesquels le prix du droit est nul. On formule donc l'hypothèse suivante de compatibilité :

Hypothèse 15 (Compatibilité)

Pour tout $y_j \in \partial Y_j$, on a $\{p \in \mathbb{R}^L \mid (p, 0) \in \psi_j(y_j, f_j(y_j))\} = \phi_j(y_j)$,

pour obtenir :

Lemme F.1 *Si pour tout j, ψ_j vérifie (Compatibilité), alors $(\overline{p}, (\overline{x}_i), (\overline{y}_j))$ est un équilibre de l'économie initiale si et seulement si il existe une allocation en droits $((a_i), (a_j)) \in (\mathbb{R}^L_+)^{m+n}$ tel que $\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n \overline{t}_j \geq 0$ et que $(\overline{p}, 0, (\overline{x}_i), (\overline{y}_j, \overline{t}_j))$ soit un équilibre privé de l' économie élargie.*

Dans un second temps on étudie l'influence sur l'équilibre des marchés de biens traditionnels d'un accroissement progressif du prix du droit et des transferts de revenus induits. Les allocations en droits pour lesquelles il existe un équilibre sont alors déterminées de manière endogène comme celles apurant le marché pour un certain prix du droit et un certain type de transferts de revenus. Parallèlement, la méthode de preuve consiste à montrer que le degré de la correspondance donnant les équilibres de l'économie initiale (ou de manière équivalente, sous l'hypothèse (Compatibilité), la correspondance donnant les équilibres privés de l'économie élargie avec prix nul du droit) est préservé par l'application d'une homotopie augmentant progressivement le prix du droit et imitant l'influence de l'allocation initiale en droits sur les revenus.

On obtient successivement que, si les règles de tarification ont, comme la règle de tarification marginale une certaine flexibilité vis-à-vis des prix de droits acceptables :

Hypothèse 16 (Flexibilité) *Pour tout j, pour tout $y_j \in \partial Y_j$, l'ensemble*

$$Q_j(y_j) = \{q \in \mathbb{R}_+ \mid \exists p \in S_{++}\ (p, q) \in \psi_j(y_j, f_j(y_j))\}$$

des prix de droits acceptables par l'entreprise j est ouvert dans $\mathbb{R}_+$.

alors il existe des équilibres pour les prix du droit au voisinage de zéro :

Théorème F.2 *Sous les hypothèses (P), (PF), (EX-C), (PR), (SPR), (SA), (R), (PR′), (Compatibilité) et (Flexibilité), il existe un voisinage de zéro dans $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{O}$, tel que pour tout prix $q \in \mathcal{O}$, il existe une allocation initiale en droit $((a_i), (a_j)) \in \mathbb{R}^{m+n}$ telle que l'économie élargie a un équilibre privé avec prix du droit égal à q.*

Si, d'autre part, malgré l'usage éventuel de techniques moins productives, l'activité économique reste viable quel que soit le prix du droit, au sens où :

Hypothèse 17 (SA′) *Pour tout $((p, q), (y_j)) \in (S \times \mathbb{R}_+) \times \prod_{j=1}^n \partial Y_j$ tel que $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0$ et $(p, q) \in \cap \psi_j(y_j, f_j(y_j))$ on a $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \omega) > 0$.*

Alors il existe des équilibres quel que soit le prix du droit :

Théorème F.3 *Sous les hypothèses (P), (EX-C),(PF), (PR), (SPR), (SA), (R), (PR), (PR′),(Compatibilité), (Flexibilité) et (SA′), pour tout prix positif q, il existe une allocation initiale en droit $((a_i), (a_j)) \in \mathbb{R}^{m+n}$ tel que l'économie élargie a un équilibre privé avec prix du droit égal à q.*

Ce dernier résultat peut être vu comme un résultat d'équilibre avec prix du droit fixe et des contraintes sur l'allocation initiale de droits (similaire dans un sens aux équilibres à prix fixe *à la* Drèze (29)). Ces contraintes font qu'à ce stade on ne peut affirmer l'existence d'un équilibre avec un état de l'environnement amélioré par rapport à la situation initiale.

En effet, toutes les hypothèses précédentes sont vérifiées dans le cas particulier où les entreprises ne modifient pas leur comportement initial et se contentent d'acheter la quantité de droits nécessaire à leur production quel que soit son prix ; on ne peut obtenir dans ce cas que des équilibres correspondants à ceux de l'économie initiale. Il convient donc d'affirmer que les entreprises ont la réaction « naturelle » de diminuer leur pollution suite à un accroissement important du prix du droit :

Hypothèse 18 (Sensibilité) *Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $K \geq 0$ *tel que pour tout* $(p, q, (y_j)) \in (S \times \mathbb{R}_+) \times \prod_{j=1}^n Y_j$ *tel que* $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0$, $(p, q) \in \cap_j \psi_j(y_j, f_j(y_j))$, $p \in S_{++}$ *et* $q \geq K$, *on a pour tout* j, $f_j(y_j) \geq -\epsilon$.

Cette hypothèse est vérifiée si les ψ_j sont sans pertes et également pour la règle de tarification marginale pourvu que la pollution croisse avec la production et que les ensembles de production initiaux Y_j soient étoilés en zéro.

On obtient finalement des résultats d'existence d'équilibres privés et publics *pour toute allocation initiale en droit* :

Théorème F.4 *Sous les hypothèses (P), (PF), (EX-C) , (PR), (SPR), (SA), (R), (PR′), (Compatibilité), (Flexibilité),(Sensibilité), (SA′) et* [20] *(R′), pour tout allocation initiale en droit* $((a_i), (a_j)) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$, *l'économie élargie a un équilibre privé.*

Théorème F.5 *Sous les hypothèses (P), (PF), (EX-C) , (PR), (SPR), (SA), (R), (PR′), (Compatibilité), (Flexibilité), (Sensibilité), (SA′) et (R′), pour tout allocation initiale en droit* $((a_i), (a_j)) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$, *l'économie élargie a un équilibre public.*

[20] R′ est l'équivalent non rappelé ici de l'hypothèse (R) pour l'économie avec marchés de droits. Voir le chapitre 2.

G Ouverture d'un marché de droits et Pareto optimalité.

Nous continuons notre étude de l'influence de l'ouverture d'un marché de droits en nous intéressant aux propriétés d'optimalité au sens de Pareto des équilibres de tarification marginale d'une économie avec marché de droits. On ne vise pas là à établir un « théorème de Coase » en équilibre général, sachant que l'objectif premier des marchés de droit d'émission est la réduction de la pollution au moindre coût (et non l'atteinte d'un optimum) et que les formalisations du théorème de Coase en équilibre général nécessitent des constructions complexes (voir section *D*) : marchés d'effets externes bilatéraux pour Arrow (1), Laffont, (48) et Bonnisseau (5), équilibres de Lindhal pour des droits vus comme des biens publics par Boyd (14) et Conley (20).

Au contraire, nous nous appuyons sur la remarque simple, qu'en distribuant une quantité fixe de droits, l'autorité environnementale crée un bien public : la différence entre cette quantité et le niveau de pollution obtenu dans le cas du « laisser-faire » . Ce bien public est produit gratuitement, par l'intermédiaire de la loi. Cette particularité permet de contourner en partie les problèmes de « passagers clandestins » , situation caractéristique en présence de biens publics où le comportement stratégique de chaque consommateur, qui profite en partie des dépenses en biens publics des autres agents, conduit à un approvisionnement global insuffisant.

Dans un modèle identique à celui du second chapitre, on étudie les propriétés d'optimalité des équilibres de tarification marginale avec marchés de droits. On obtient ainsi des résultats de décentralisation et on constate d'autre part que l'accès des consommateurs aux marchés de droit renforce les propriétés d'optimalité, ce qui nous conduit à introduire des équilibres avec subventions pour l'usage de droit, grâce auxquels on obtient finalement des conditions suffisantes d'optimalité.

Le marché de droits apparaît finalement comme un outil complexe permettant à la fois de définir une valeur pour l'environnement, d'influencer le comportement des entreprises et d'effectuer des transferts de richesses.

1 Caractérisation des optima de Pareto

Nous nous intéressons aux optima de Pareto de l'économie du chapitre 2, définis comme :

Definition 9 *Un élément* $((x_i),(y_j) \in (\mathbb{R}^L_{++})^m \times \prod_{j=1}^n Y_j$ *est une allocation réalisable si* $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j + \omega$.
Un élément $((x_i),(y_j)) \in (\mathbb{R}^L_{++})^m \times \prod_{j=1}^n Y_j$ *est un optimum de Pareto si c'est une allocation réalisable et si il n'existe pas d'allocation réalisable* $((x'_i),(y'_j))$ *tel que pour tout* i, $u_i(x_i\prime, \sum_{j=1}^n f_j(y'_j)) \geq u_i(x_i, \sum_{j=1}^n f_j(y_j))$ *, et pour un* i_0 *au moins,* $u_{i_0}(x'_{i_0}, \sum_{j=1}^n f_j(y'_j)) > u_{i_0}(x_{i_0}, \sum_{j=1}^n f_j(y_j))$.

Ceux-ci sont caractérisés [21], pourvu que l'une des utilités soit strictement monotone, par le résultat suivant de Bonnisseau (5) :

Théorème G.1 *Si* $((\overline{x}_i),(\overline{y}_j))$ *est un optimum de Pareto, alors il existe* $(\overline{p},\overline{q}) \in \mathbb{R}^{L+1}_+$ *tel que*

1. *Pour tout* i*, il existe* $\overline{q}_i$ *tel que* $(\overline{p},\overline{q}_i) \in N_{P_i(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))}(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$ *et* $\sum_{i=1}^m \overline{q}_i = \overline{q}$
2. *Pour tout* j, $\overline{p} + \overline{q}\nabla f_j(\overline{y}_j) \in N_{Y_j}(\overline{y}_j)$

2 Equilibres privés

La caractérisation donnée au théorème 1 implique qu'un optimum de Pareto peut être décentralisé comme équilibre privé de tarification marginale (voir définition 7) au sens où :

Proposition 3 *Pour tout optimum de Pareto, il existe une allocation initiale en droits qui permet de le décentraliser comme équilibre privé de tarification marginale avec transferts.*

[21] $P_i(x_i, \sum_{j=1}^n f_j(y_j))$ désigne dans ce qui suit l'ensemble $\{(x'_i,\tau) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^L_+ \mid u_i(x'_i,\tau) \geq u_i(x_i, \sum_{j=1}^n f_j(y_j))\}$ des éléments préférés à $(x_i, \sum_{j=1}^n f_j(y_j))$ par l'agent i.

Néanmoins le choix d'une bonne allocation initiale en droits est cruciale pour atteindre un équilibre optimal. On peut en effet remarquer que les optima forment une sous-variété de codimension 1 si l'ensemble des équilibres privés de tarification marginale est une variété différentiable.

3 Equilibres Publics

On s'intéresse alors à la possibilité de resserrer les liens entre équilibres et optima en permettant l'accès des consommateurs au marché de droit. A un équilibre public (voir définition 8), les conditions nécessaires et suffisantes du premier ordre pour le programme du consommateur sont :

Lemme G.1 *Soit* $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^L_{++}$:
- *L'élément* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i)$ *avec* $\overline{s}_i > 0$ *est solution du problème du consommateur si et seulement si* $(\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\overline{x}_i, \overline{s}_i) = w_i$ *et* $(\overline{p}, \overline{q}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, -A+\sum_{i=1}^m \overline{s}_i)}(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i)$.
- *L'élément* $(0, \overline{x}_i)$ *est solution du problème du consommateur si et seulement si* $\overline{p} \cdot \overline{x}_i = w_i$ *et si il existe* $\overline{q}_i \leq \overline{q}$ *tel que* $(\overline{p}, \overline{q}_i) \in N_{P_i(\overline{x}_i, -A+\sum_{i=1}^m \overline{s}_i)}(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i)$.

où A est la dotation globale en droits.

Cette caractérisation implique que tout optimum de Pareto peut également être décentralisé comme équilibre public (voir définition 8) :

Proposition 4 *Pour tout optimum de Pareto, il existe une allocation initiale en droits qui permet de le décentraliser comme équilibre public de tarification marginale avec transferts.*

Cependant, comme remarqué par Smith (53) dans un cadre d'équilibre partiel, l'absence de consommation du droit est en fait une condition nécessaire d'optimalité :

Proposition 5 *Un équilibre public de tarification marginale* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j)))$ *est Pareto optimal seulement si pour tout* i, $\overline{s}_i = 0$.

En effet à un optimum le prix du droit doit être égal à la somme des utilités marginales pour l'environnement et donc supérieur à chacune d'entre elles prises individuellement. Cette situation n'est acceptable pour un consommateur que si il ne peut pas vendre de droits, d'où la condition d'exclusion du marché. Paradoxalement, l'intérêt de l'ouverture du marché aux consommateurs est de permettre de détecter qu'ils s'abstiennent d'y participer.

D'autre part, l'ensemble des équilibres publics est une meilleure approximation de l'ensemble des optima de Pareto que l'ensemble des équilibres privés car il y a moins d'équilibres publics que d'équilibres privés. En effet, on peut associer à tout équilibre public un équilibre privé en retranchant de la dotation initiale en droit de chaque consommateur, la quantité qu'il consomme à l'équilibre tandis qu'on ne peut associer à un équilibre privé un équilibre public que si l'utilité marginale de l'environnement est pour chaque consommateur inférieure au prix du droit.

4 Equilibres subventionnés

Poursuivant l'approche de l'optimalité par l'encouragement de la participation des consommateurs au marché de droits, on considère finalement des équilibres (k_i)-subventionnés[22]. Le gouvernement y diminue l'allocation globale de $(k_i-1)s_i$ quand l'agent i achète s_i droits si bien que l'achat de s_i droits par un consommateur conduit en fait à une amélioration de $k_i s_i$ de l'environnement.

Pour prévenir une éventuelle manipulation de leurs demandes en droits par les consommateurs dans le but d'éviter une diminution de leurs revenus suite à la baisse de l'allocation globale par le gouvernement, on impose que la subvention des achats de droits d'un certain consommateur se fasse uniquement au détriment des autres consommateurs, procédure qui peut être comparée à celle décrite par Guttman (39) pour la fourniture de biens publics.

On obtient alors comme concept d'équilibre :

Definition 10 *Un élément* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j)))$ *de* $(\mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+)^m \times \prod_{j=1}^n (Y_j \times \mathbb{R}_-)$ *est un* (k_i)*-équilibre de tarification marginale avec transferts si il existe un prix* $(\overline{p}, \overline{q}) \in \mathbb{R}^{L+1}_+$ *et une distribution des richesses* $(w_1, \cdots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ *avec* $\sum_{i=1}^m w_i = (\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\omega + \sum_{j=1}^n \overline{y}_j, A - \sum_{i=1}^m k_i \overline{s}_i + \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$ *tels que :*

[22] le facteur k_i est supérieur à 1

1. *pour tout* i, $(\overline{x}_i, \overline{s}_i)$ *maximise* $u_i(x_i, -A + \sum_{h \neq i} k_h s_h + k_i s_i)$ *dans l'ensemble de budget* $\{(x_i, s_i) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+ \mid \overline{q} s_i + \overline{p} \cdot x_i \leq w_i\}$;
2. *Pour tout* j, $\overline{p} + \overline{q} \nabla f_j(\overline{y}_j) \in N_{Y_j}(\overline{y}_j)$;
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$;
4. $\sum_{i=1}^m \overline{s}_i = \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j) + A$;

A un (k_i)-équilibre, les conditions nécessaires et suffisantes du premier ordre pour le programme du consommateur sont :

Lemme G.2 *Soit* $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^L_{++}$:
- *L'élément* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i)$ *avec* $\overline{s}_i > 0$ *est solution du problème du consommateur si et seulement si* $(\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\overline{x}_i, \overline{s}_i) = w_i$ *et* $(\overline{p}, \frac{\overline{q}}{k_i}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m k_i \overline{s}_i)}(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m k_i \overline{s}_i)$.
- *L'élément* $(0, \overline{x}_i)$ *est solution du problème du consommateur si et seulement si* $\overline{p} \cdot \overline{x}_i = w_i$ *et il existe* $\overline{q}_i \leq \overline{q}$ *tel que* $(\overline{p}, \frac{\overline{q}_i}{k_i}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m k_i \overline{s}_i)}(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m k_i \overline{s}_i)$.

De telle sorte que les optima de Pareto pour lesquels la structure des utilités marginales est compatible avec les niveaux de subvention peuvent être décentralisés[23] :

Proposition 6 *Pour tout optimum de Pareto tel que l'utilité marginale du consommateur i pour l'environnement ,* $\overline{q}_i$*, est inférieure à* $\frac{\overline{q}}{k_i}$*, il existe une allocation initiale en droits qui permet de le décentraliser comme* (k_i)*-équilibre avec transferts.*

A mesure que les k_i augmentent et que $\sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i}$ décroît vers 1, l'ensemble des équilibres subventionnés approche de plus en plus finement l'ensemble des optima de Pareto car à ces équilibres l'utilité marginale de chaque agent doit être k_i fois plus petite que le prix du droit.

Quand $\sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i}$ atteint 1, on obtient finalement une condition suffisante d'optimalité :

[23]Les éléments $\overline{q}_i$ et $\overline{q}$ désignent ici les prix donnés par le théorème G.1

Proposition 7 *Soit* (k_i) *tel que* $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} = 1$. *A une allocation de* (k_i)*-équilibre* $((\overline{x}_i, \overline{s}_i)), ((\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j)))$ *tel que pour tout* i, $\overline{s}_i > 0$, *les conditions nécessaires du théorème* 1 *sont satisfaites. Si de plus , les ensembles de production et les fonctions de pollution sont convexes, alors un tel équilibre est Pareto optimal.*

H Externalités de production et anticipations

Le dernier chapitre de cette thèse naît d'une interrogation sur l'adéquation du modèle « classique » d'économie avec externalités de Arrow (1) pour la représentation du comportement des agents économiques face au changement climatique. On se concentre sur le secteur productif où, bien que le processus émission de gaz à effet de serre, augmentation de leur concentration atmosphérique, changement climatique, influence sur les capacités de production soit le type même de l'externalité, les entreprises ne semble pas prendre en compte cette donnée dans leurs choix de production. Ce sont au contraire les gouvernements qui prennent des mesures contraignantes. L'hypothèse fondatrice du modèle étudié ici est que ces différences de comportement sont la traduction de différences dans les prévisions des entreprises et du gouvernement sur l'influence du changement climatique sur la production.

On s'intéresse donc à une situation où un gouvernement a sa propre estimation des capacités de production dans l'économie, Z, qui peut être plus pessimiste que l'agrégat des possibilités de production telles que perçues par les entreprises, $\{y \in \mathbb{R}^L \mid \exists (y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j}) \mid \sum_{j=1}^n y_j = y\}$. Nous étudions dans ce cadre le problème de la décentralisation des optima de Pareto par rapport à Z dans l'économie où les ensembles de production sont données par les Y_j.

A l'inefficacité du marché dans la prise en compte des externalités vient se superposer un risque de défaut : les entreprises, trop optimistes sur leurs possibilités de production futures, peuvent s'engager à fournir des biens qu'elles seront *in fine* incapables de produire. Il convient donc, pour le gouvernement, d'établir un mécanisme permettant le transfert de ses propres anticipations.

1 Formalisation du problème

On se situe dans le cadre du modèle du premier chapitre, mais on s'intéresse au cas particulier où seules les entreprises causent et subissent des externalités. Nous nous limitons également à des comportements compétitifs et introduisons donc les hypothèses de convexité correspondantes

Hypothèse 19 (EX-CONV-P) *Pour tout j, $Y_j : (\mathbb{R}^L)^{n-1} \to \mathbb{R}^L$ est une correspondance semi-continue-inférieurement, à graphe fermé et à valeurs convexes.*

Nous introduisons d'autre part l'ensemble de production du gouvernement Z, qui représente les productions agrégées que le gouvernement considère comme techniquement réalisables. Cet ensemble rentre dans un cadre à la Arrow-Debreu (voir (22)) :

Hypothèse 20 (G) *Z est fermé, convexe, vérifie les hypothèses de libre-disposition, d'irréversibilité de la production et de possibilité de l'inaction.*

et le gouvernement n'anticipe que des plans de production réalisables au niveau individuel au sens où :

Hypothèse 21 (Décomposabilité) *Pour tout $z \in Z$, il existe $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ tel que $\sum_{j=1}^n y_j = z$.*

On s'intéresse alors aux optima de Pareto par rapport à Z situés à l'intérieur des ensembles de consommation individuels qui, grâce aux premier et second théorèmes du bien-être, peuvent s'identifier aux équilibres compétitifs associés à l'ensemble de production du gouvernement, Z.

Se référant à la littérature existante (notamment Arrow (1) et Laffont (48)), on cherche à obtenir des résultats de décentralisation par le biais de l'ouverture de marchés de droits. En toute généralité, l'ouverture d'un marché de droits se formalise par la donnée de « fonctions de droit » $h_j : (\mathbb{R}^L)^n \to \mathbb{R}$, déterminant la quantité de droits $h_j(y_j, \overline{y}_{-j})$ que l'entreprise j doit utiliser comme input afin de produire y_j dans un environnement $\overline{y}_{-j}$. Son ensemble de production devient alors

$$G_j(\overline{y}_{-j}) = \{(y_j, \alpha_j) \in \mathbb{R}^{L+1} \mid y_j \in Y_j(y_{-j}) \ , \ \alpha_j \leq -h_j(y_j, \overline{y}_{-j})\}.$$

L'offre de droit est établie par le gouvernement par la distribution initiale d'une quantité A aux agents.

Lorsque s'ouvre un tel marché de droits, un équilibre est défini par :

Definition 11 (Prix-équilibre avec droits) *Un vecteur de plans de production $(\overline{y}_j, \overline{\alpha}_j), \in \prod_{j=1}^n G_j(y_{-j})$ forme conjointement avec un vecteur de plans de consommation $(\overline{x}_i) \in (\mathbb{R}^L_+)^m$ un prix-équilibre avec droits si il existe un prix $(\overline{p}, \overline{q}) \in \mathbb{R}^{L+1}_{++}$ et une répartition des richesses $(w_1, \ldots, w_m)$ où $\sum_{i=1}^m w_i = (\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega, \sum_{j=1}^n \overline{\alpha}_j + A)$ tels que :*

1. *Pour tout* j*,*$(\overline{y}_j, \overline{\alpha}_j)$ *maximise le profit,* $(\overline{p}, \overline{q}) \cdot (y_j, \alpha_j)$*, dans* $G_j(\overline{y}_{-j})$*;*
2. *Pour tout* i*,* $\overline{x}_i$ *maximise l'utilité* $u_i(x_i)$ *dans l'ensemble de budget* $\{x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$*;*
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$*;*
4. $\sum_{j=1}^n \overline{\alpha}_j + A = 0$.

Considérant que la distance à la frontière de Z peut-être prise comme mesure de l'inefficacité de la production, nous nous intéressons plus particulièrement à des fonctions de droit, construites à partir de la fonction de transformation (voir Luenbegrer (50), Bonnisseau-Cornet (8) et Bonnisseau-Crettez (11)) de Z, $g : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ qui associe à un plan de production z, la quantité d'un panier de biens référence $\gamma \in \mathbb{R}^L_{++}$, nécessaire pour atteindre la frontière de Z,

$$g(z) = \min\{s \in \mathbb{R} \mid z - s\gamma \in Z\}.$$

A partir de cette fonction de transformation, on peut construire diverses « fonctions de droit » comme

– Une part de l'inefficacité agrégée
$$h_j^1(y_j, \overline{y}_{-j}) = \frac{g(y_j + \sum_{k \neq j} \overline{y}_k)}{n}$$
– la différence entre les niveaux d'inefficacité lorsqu'une firme produit et lorsqu'elle ne produit pas
$$h_j^2(y_j, \overline{y}_{-j}) = g(y_j + \sum_{k \neq j} \overline{y}_k) - g(\sum_{k \neq j} \overline{y}_k).$$
– Une transformation croissante et convexe des précédentes :
$$h_j^3(y_j, \overline{y}_{-j}) = \phi(g(y_j + \sum_{k \neq j} \overline{y}_k)) - \psi(g(\sum_{k \neq j} \overline{y}_k)).$$

Ces fonctions ont la propriété idéale de compenser la différence entre les coûts marginaux de production individuels et collectifs au sens de

Hypothèse 22 (Compensation) *Pour tout plan de production* $z \in Z$ *associé à un optimum de Pareto, il existe* $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ *avec* $\sum_{j=1}^n y_j = z$ *et* $\lambda > 0$ *tel que pour tout* j*,*

$$N_Z(\sum_{j=1}^n \overline{y}_j) \;\subset\; N_{Y_j(y_{-j})}(y_j) + \lambda \partial h_j(\cdot, y_{-j})(y_j).$$

Cette condition s'avère en fait suffisante pour la décentralisation des optima de Pareto,

Théorème H.1 *Si les hypothèses (EX-CONV-P), (C), (G), (Décomposabilité), (CONV-Droit)*[24] *et (Compensation) sont satisfaites, tout optimum de Pareto peut être décentralisé comme un équilibre avec droits.*

Si bien, que l'ouverture d'un marché de droits basés sur des fonctions du type h_1, h_2 ou h_3 permet la décentralisation des optima de Pareto.

D'autre part le choix de fonctions de droits satisfaisant l'hypothèse (Compatibilité) est nécessaire pour obtenir un résultat de décentralisation complet dans un cadre différentiable :

Théorème H.2 *Supposons que Z a une frontière lisse* [25] *et que l'une des fonctions d'utilité est lisse* [26] *et strictement concave. Si (Compensation) n'est pas satisfaite, il existe au moins un optimum de Pareto qui ne peut être décentralisé à un équilibre avec droits.*

Des résultats similaires sont obtenus pour des équilibres avec taxes sur la production, quand ces taxes sont construites à partir de la fonction de transformation.

2 Résultats du type premier théorème du bien-être

2.1 Contrôle par les quantités

Pour obtenir des résultats du type premier théorème du bien-être, il convient d'accentuer l'influence du gouvernement sur la distance d'équilibre à ∂Z. Cette influence peut s'opérer au travers des quantités de droits mises sur le marché, si la quantité de droits utilisée caractérise la distance à Z comme dans le cas de h_1 :

[24](CONV-Droit) est une hypothèse de convexité sur les fonctions de droit que nous ne rappelons pas ici (voir le chapitre 4). Elle est vérifiée notamment par h_1, h_2 et h_3.

[25]C'est à dire que ∂Z est une sous-variété C^2 de $\mathbb{R}^L$ de codimension 1.

[26]C^2.

Hypothèse 23 (Caractérisation) *Il existe* $\overline{A} \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ *on a :*

$$\sum_{j=1}^{n} h_j(y_j, y_{-j}) = \overline{A} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} y_j \in \partial Z,$$

et si d'autre part le coût marginal du droit reproduit parfaitement le coût marginal de production collectif (condition vérifiée par h_1, h_2, h_3) :

Hypothèse 24 (Compensation Exacte) *Pour tout* $y_j \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ *tel que* $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$, $\partial h_j(\cdot, y_{-j})(y_j)$ *est égal pour tout* j *et on a*[27] $N_Z(\sum_{j=1}^n \overline{y}_j) =< \partial h_j(\cdot, \overline{y}_{-j})(\overline{y}_j) >$.

tandis que les producteurs se trouvent effectivement contraints par le marché des droits puisque la frontière de production qu'ils anticipent est trop optimiste pour représenter une contrainte effective à un optimum de Pareto :

Hypothèse 25 (Sur-Optimisme) *Pour tout* $y_j \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ *tel que* $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$, *on a* $T_Z(\sum_{j=1}^n y_j) \subset \sum_{j=1}^n T_{Y_j(y_{-j})}(y_j)$.

Cette dernière hypothèse, indépendante du choix de la fonction de droit, est vérifiée par exemple quand la présence d'externalités ou l'excès d'optimisme des entreprises conduit à une condition du type, pour tout $y_j \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ tel que $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$, il existe j tel que $y_j \in intY_j(y_{-j})$.

On obtient finalement :

Théorème H.3 *Si les hypothèses, (EX-CONV-P), (C), (G), (CONV-Droit), (Caractérisation), (Sur-Optimisme) et (Compensation Exacte) sont satisfaites, il existe une allocation initiale en droits A tel que* $(y_j, \alpha_j), (x_i)$ *est un équilibre si et seulement si* $(\sum_{j=1}^n y_j, (x_i))$ *est un optimum de Pareto.*

Ainsi, on obtient dans un premier temps un « premier théorème du bien-être » pour des fonctions de droit du type h_1.

[27] On note $< \partial h_j(\cdot, \overline{y}_{-j})(\overline{y}_j) >$ le cône engendré par $\partial h_j(\cdot, \overline{y}_{-j})(\overline{y}_j)$

2.2 Contrôle par le prix

L'optimalité peut-être contrôlée via les prix lorsque l'hypothèse « d'optimisme » est étendu à :

Hypothèse 26 (Sur-Optimisme-Fort) *Pour tout* $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ *tel que* $\sum_{j=1}^n y_j \in Z$, *on a* $T_Z(\sum_{j=1}^n y_j) \subset \sum_{j=1}^n T_{Y_j(y_{-j})}(y_j)$.

et que le gouvernement met en place un processus permettant l'obtention de droits supplémentaires en échange de paniers de biens γ. L'ensemble de production de l'entreprise incorpore alors la possibilité d'obtenir des droits de production supplémentaires en échange de paniers de biens γ et on définit une notion d'équilibre avec apurement du marché des droits par le gouvernement. Le gouvernement impose ainsi une relation d'équilibre entre prix du droit et prix du bien

$$q = p \cdot \gamma \qquad (\star)$$

Si, d'autre part, le taux marginal de substitution entre le droit et les biens est sensible à la distance à ∂Z, par exemple quand la fonction de droits est un cas particulier de h_3 de la forme

$$h_j(y_j, \overline{y}_{-j}) = \phi(g(y_j + \sum_{k \neq j} \overline{y}_k)) - \psi(g(\sum_{k \neq j} \overline{y}_k)).(\star\star)$$

où ϕ est une fonction strictement convexe telle que $\phi'(0) = 1$, on obtient à nouveau un résultat du type premier théorème du bien être :

Théorème H.4 *Si les hypothèses (EX-CONV-P), (C), (G), (Sur-Optimisme-Fort) sont satisfaites et la « fonction de droit » est de la forme* $(\star\star)$, *tout équilibre avec apurement du marché par le gouvernement est Pareto optimal.*

3 Applications

Ces résultats sont ensuite appliqués au problème standard de décentralisation où $Z = \{z \mid \exists (y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})\ ,\ z = \sum_{j=1}^n y_j\}$, puis à des situations où l'origine des différences entre Z et l'agrégat des ensembles de production des firmes est clairement explicitée. On s'intéresse notamment à un modèle schématique d'une économie soumise au changement climatique. Dans ce cadre la comparaison entre les marchés de droit « de production » présentés ici et les marchés de droits d'émission permet de préciser le rôle du marché de droits de production : sa particularité est de permettre le transfert aux entreprises des prévisions du gouvernement sur les conséquences du changement climatique. Dès lors le marché de droits de production peut s'interpréter comme représentant une politique d'adaptation au changement climatique tandis que le marché de droits d'émission est vu comme un outil de lutte contre ce phénomène. Ce dernier n'acquérant des propriétés d'optimalité qu'en présence du premier, une vision précise des coûts d'adaptation au changement climatique apparaît comme un prérequis pour une détermination endogène du niveau optimal des émissions de gaz à effets de serre.

Bibliographie

[1] Arrow, K.J (1969) « The organization of economic activity : Issues pertinent to the Choice of Market versus Non-Market allocation ». in Joint economic commitee, The analysis and evaluation of Public Expenditures ; The PPB System, Washington DC : Government Printing Office, pp 47-64.

[2] Arrow, K.J et Hahn, F. (1971) « General Competitive Analysis ». San Francisco, Holden-Day.

[3] Bohringer, C. (2003) « The Kyoto Protocol : A Review and Perspectives ». Oxford Review of Economic Policy, Vol. 19 (3) pp. 451-466

[4] Bonnisseau, J.-M. (1992). « Existence of equilibria in the presence of increasing returns : a synthesis ». Journal of Mathematical Economics, 21(5) :441–452.

[5] Bonnisseau, J-M. (1994) « Caractérisation des optima de pareto dans une économie avec effets externes ». Annales d'économie et de statistique. No. 36

[6] Bonnisseau, J-M. (1997) « Existence of Equilibria in Economies with Externalities and Nonconvexities ». Set-Valued Analysis, Volume 5, Number 3, pp. 209-226(18)

[7] Bonnisseau, J-M. (2003) « Regular economies with non-ordered preferences ». Special issue on the Athens-Minnesota Conferences . J. Math. Econom. 39, no. 3-4, 153–174.

[8] Bonnisseau, J.-M. and Cornet, B. (1988). « Existence of equilibria when firms follow bounded losses pricing rules ». Journal of Mathematical Economics, 17(2-3) :119–147. General equilibrium theory and increasing returns.

[9] Bonnisseau, J.-M. and Cornet, B. (1990). « Existence of marginal cost pricing equilibria : the nonsmooth case ». International Economic Review, 31(3) :685–708.

[10] Bonnisseau, J.-M. and Cornet, B. (1991). « General equilibrium theory with increasing returns : the existence problem ». In Equilibrium theory and applications (Louvain-la-Neuve, 1989), Internat. Sympos. Econom. Theory Econometrics, pages 65–82. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[11] Bonnisseau, J-M and Crettez, B. (2007) « On the characterization of efficient production vectors ». Economic Theory, 31(2), pp. 213-223.

[12] Bonnisseau, J.M. and A. Jamin, (2004), « Equilibria with Increasing Returns : Sufficient Conditions on Bounded Production Allocations ». Cahier de la MSE 2004-17, Université Paris 1.

[13] Bonnisseau, J-M. and Médecin, J-P (2001). « Existence of marginal pricing equilibria in economies with externalities and non-convexities ». J. Math. Econom. 36, no. 4, 271–294.

[14] Boyd, J. and Conley, John P. (1997) « Fundamental Nonconvexities in Arrovian Markets and a Coasian Solution to the Problem of Externalities ». Journal of Economic Theory, Vol. 72, 1997, pp. 388-407.

[15] (1994) Buchanan, J. and Yong,Y. Eds "The Return to Increasing Returns." Ann Arbor, The University of Michigan Press.

[16] Cellina, A. and Lasota, A. (1969). « A New Approach to the Definition of Topological Degree for Multivalued Mappings ». Atti della Academia Nazionale dei Lincei, Rendiconti. Classe de Scienze Fisiche, Mathematiche e Naturali, 47, pp. 434-440.

[17] Clarke, F. H. (1975). « Generalized gradients and applications ». Transactions of the American Mathematical Society, 205 :247–262.

[18] Clarke, F. H. (1983). « Optimization and nonsmooth analysis ». Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York. A Wiley-Interscience Publication.

[19] Coase, R (1960) « The Problem of Social Cost ». Journal of Law and Economics, 3(1), 1—44

[20] Conley John P and Stefani C. Smith, (2005). « Coasian equilibrium ». Journal of Mathematical Economics, vol. 41(6), pp 687-704.

[21] Cornet, B. (1989). « Existence of equilibria in economies with increasing returns ». In Contributions to operations research and economics (Louvain-la-Neuve, 1987) , pages 79–97. MIT Press, Cambridge, MA.

[22] Debreu, G. (1959). « Theory of value : an axiomatic analysis of economic equilibrium ». . Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, Monograph 17. John Wiley & Sons Inc., New York.

[23] Dehez, P. and Drèze, J. (1988a). « Competitive equilibria with quantity-taking producers and increasing returns to scale ». Journal of Mathematical Economics, 17(2-3) :209–230.

[24] Dehez, P. and Drèze, J. (1988b). « Distributive production sets and equilibria with increasing returns ». Journal of Mathematical Economics, 17(2-3) :231–248.

[25] Dehez, P., Drèze, J. H., and Suzuki, T. (2003). « Imperfect competition à la Negishi, also with fixed costs ». Journal of Mathematical Economics, 39(3-4) :219–237. Special issue on the Athens-Minnesota Conferences (Minneapolis, MN/Athens, 2002).

[26] Dierker, E. (1982). « Regular Economies ». in Handbook of Mathematical Economics, Vol. 2, edited by K. J. Arrow and M. D. Intriligator, New York, North Holland.

[27] Dierker, E. (1974). « Topological Methods in Walrasian Economics ». Lecture notes on Economics and mathematical Sciences, 92. Springer-Verlag : Berlin.

[28] Dierker, E., Guesnerie, R., and Neuefeind, W. (1985). « General equilibrium when some firms follow special pricing rules ». Econometrica, 53(6) :1369–1393.

[29] Drèze,J. (1975) « Existence of an Exchange Equilibrium under Price Rigidities ». International Economic Review.

[30] Dubovickii, A.J. et A.A. Miljutin. (1965) « Extremum Problems in the Presence of Restrictions ». Zh. Vychisl. Mat. Fiz, 5(1965), 395-453, USSR Conp. Math and Math. Physics, 5, 1-80.

[31] Dufresne, J-L. « Jean-Baptiste Joseph Fourrier et la découverte de l'effet de serre ». La Méteorologie, n°53, Mai 2006.

[32] Florenzano, M. (2003) « General Equilibrium Analysis. Existence and Optimality of Equilibria ». Kluwer, Boston/Dordrecht/London.

[33] Foley, D. K. (1970) « Lindahl'solution and the core of an economy with public goods ». Econometrica 38, 66–72.

[34] Giraud, G. (2001) « An algebraic index theorem for non-smooth economies ». Journal of Mathematical Economics, V. 36(4), pp. 255-269.

[35] Granas, A. (1959), « Sur la notion de degré topologique pour une certaine classe de transformations multivalentes dans les espaces de Banach ». Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sc. Math. Astronom. Phys., 7 , 191-194.

[36] Godard, O. (2001), « Permis transférables nationaux et politiques environnementales. Conception et application ». Paris, Éditions de l'OCDE.

[37] Guesnerie, R. (2003) (sous la direction de) « Kyoto et l'économie de l'effet de serre ». Conseil d'analyse économique n° 39, Paris, La Documentation francaise.

[38] Guesnerie, R. (1975). « Pareto optimality in non-convex economies ». Econometrica, 43 :1–29.

[39] Guttman, J. (1978) « Understanding Collective Action : Matching Behavior ». American Economic Review, vol 68, pp 251-55.

[40] Hotelling, H. (1938). « The general welfare in relation to problems of taxation and of railway and utility rates ». Econometrica, VI :242–269.

[41] Hurwicz, L. and Reiter, S. (1973). « On the boundedness of the feasible set without convexity assumptions ». International Economic Review, 14 :580–586.

[42] IPCC (1995) « IPCC Second Assessment Report – Climate Change 1995 ». Cambridge University Press, Cambridge.

[43] IPCC (2001) « IPCC Third Assessment Report – Climate Change 2001 ». Cambridge University Press, Cambridge.

[44] Jouini, E. (1992) « An Index Theorem for Nonconvex Production Economies ». Journal of Economic Theory, 57 (1), 176-196, 1992.

[45] Jouini, E. (1992) « Unicité et stabilité de l'équilibre dans une économie de production avec règle de tarification marginale : les cas convexe et nonconvexe ». Annales d'Economie et de Statistique, 44, 159-176.

[46] Kamiya, K. (1988). « On the survival assumption in marginal (cost) pricing ». Journal of Mathematical Economics, 17 :261–273.

[47] Kehoe,T. (1980) « An index theorem for general equilibrium models with production ». Econometrica. 48(5) : 1211-32

[48] Laffont, J, J. (1978) « Effets externes et théorie économique ». Monographie du Séminaire d'économétrie. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

[49] Lindahl E, (1919) « Just Taxation – a positive solution ». in R. Musgrave et A. Peacock "Classics in the Theory of Public Finance" Macmillan, London, 1964

[50] Luenberger D. (1995) « Microeconomic Theory ». McGraw-Hill, Inc., New York.

[51] Mas-Colell, A (1985) « The Theory of General Economic Equilibrium : A Differentiable Approach ». Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[52] Pareto, V. (1906). « Manual of Political Economy ». Augustus M. Kelley, New York. 1971 translation of 1927 edition.

[53] Smith, S. and Yates, A. (2003) « Should Consumers Be Priced Out of Pollution Permit Markets ? ». Journal of Economic Education Volume 34, No. 2 pp : 181-189.

[54] Starret, D.A. (1972) « Fundamental non convexities in the theory of externalities ». Journal of Economic Theory n°4 :180-199.

[55] Stern, N. (2006). « The Economics of Climate Change – The Stern Review ». Cambridge University Press, 2007.

[56] Tietenberg, T. (2003) « The Tradable-Permits Approach to Protecting the Commons : Lessons for Climate Change ». Oxford Review of Economic Policy, Vol. 19 (3) pp. 400-419(20).

[57] United Nations. (1992) « United Nations Framework Convention on Climate Change ». UN Document A :AC.237/18.2,3, 1992.

[58] United Nations Framework Convention on Climate Change (1997) « Kyoto Protocol to the United Nations framework convention on climate change ». United Nations F (UN), New York, USA, 1997.

[59] Vohra, R. (1992). « Marginal cost pricing under bounded marginal returns ». Econometrica, 60(4) :859–876.

[60] Walras, L. (1874). « Éléments d'Économie Politique Pure ». Corbaz, Lauzanne.

[61] World Meteorological Organization « World Climate Conference : Extended Summaries of Papers Presented at the Conference ». Geneva, February 1979.

Chapitre 1

Une formule de l'indice pour économies de production avec externalités

Résumé

Nous établissons une formule de l'indice pour des économies productives avec externalités. Nous prenons en compte la possibilité de rendements croissants et représentons le comportement des entreprises par des règles de tarification générales. Comme corollaires, nous obtenons l'existence d'équilibres de tarifications générales.

An Index Formula for Production Economies with Externalities.

Antoine Mandel[28]

Centre d'Economie de la Sorbonne, UMR 8174, CNRS-Université Paris 1.

Abstract

In this paper we prove an index formula for production economies with externalities. We allow for non-convexities in the production sector and set the firms behavior according to general pricing rules. We derive as corollaries existence of a general equilibrium in such a setting.

Key Words : General Equilibrium Theory, Existence of Equilibrium, Increasing Returns, Externalities, Degree Theory.

[28]The author is grateful to Professor Jean-Marc Bonnisseau for his guidance and many useful comments. All remaining errors are mine.

1 Introduction

In this paper we establish an index formula for economies with non-convex production sets and externalities. As emphasized by the title of Starret's paper (19), "Fundamental non-convexities in the theory of externalities", those two phenomena are closely related, especially when the economy encompasses markets of allowances for external effects. Existence of equilibrium in such a setting has already been studied by Bonnisseau-Médecin (4) and Bonnisseau (1) for general pricing rules, while Laffont (17) deals with the case of profit maximizing producers. Index formula have been established in exchange economies with externalities by Bonnisseau (2) and Del Mercato (8).

The explicit computation of the degree entails existence results but also goes a step further in the direction of finiteness and uniqueness of equilibrium. Indeed, one may then add regularity assumptions and impose additional properties on the demand such as the generalized law of demand (see (15)) in order to obtain uniqueness results. This issue is crucial for applications and the number of applied theoretic models encompassing the interactions between the economic activity and the environment is growing with the concern about climate change. Moreover, it seems to us the degree approach to equilibrium proofs is better suited for future perturbations thanks to its relation with global analysis. Perturbations are of concern here as the presence of externalities often appeals for governmental policies.

Our model is very similar to these of (1) and (4). An environment is defined as a scheme of consumption and production plans. Utility of the consumers, production sets and pricing rules of the producers depend on the environment. Hence arise relations of interdependence between agents and compatibility constraints on the set of feasible outcomes. Given an environment and a price, consumers maximize their utility under a budget constraint while producers choose a production plan in agreement with the pricing rule. The economy is at equilibrium when those choices lead to clearance of all markets.

In order to prove there exists such an equilibrium we use the degree approach as pioneered by Dierker (9), Mas-Colell (18) and Kehoe (16). Namely, we establish an index formula using the degree theory for correspondences (see Granas (13) or Cellina and al. (6)) together with the results of Jouini ((14) and (15)) for standard production economies. Therefore, as in the literature on existence of a general equilibrium with increasing returns, two assumptions are crucial. First the pricing rules must have bounded losses or coincide with marginal pricing. Second, a survival assumption must hold for a sufficiently large range of initial allocations. While (1) and (4) posit this survival assumption on the set of compatible consumption and production scheme, we posit it holds for a given environment. The sets under consideration are not comparable, hence neither are the assumptions, nor the results. It seems to us our approach is well suited for situations where the set of compatible consumption and production scheme is difficult to compute and when the comparison between the equilibria of economies with and without external effects is an issue *per se*.

2 The Model

We consider an economy with L commodities indexed by ℓ, m consumers indexed by i and n producers indexed by j. The space of prices is the L-dimensional simplex $S = \{p \in \mathbb{R}^L_+ \mid \sum_{\ell=1}^L p_\ell = 1\}$ [29]. There are general externalities in the economy, so that the production possibilities of agent j are described by a correspondence $Y_j : (\mathbb{R}^L)^{I+J-1} \to \mathbb{R}^L$ which associates to an environment[30] $((x_i),(y_{-j})) \in (\mathbb{R}^L)^{I+J-1}$ determined by the other agents consumption and production choices, a set of technically feasible production plans. As we will take in consideration non-convexities in the production sector, we do not set the producers as profit maximizers. We will rather use the more general notion of pricing rule. The pricing behavior of agent j will be described by a correspondence ϕ_j defined on the graph of the correspondence ∂Y_j, *Graph* $\partial Y_j := \{(((x_i),(y_{-j})), y_j) \in (\mathbb{R}^L)^{I+J-1} \times \mathbb{R}^L \mid y_j \in \partial Y_j((x_i),(y_{-j}))\}$, and with values in the L-dimensional simplex S. The price p is acceptable for firm j given an environment $((x_i),(y_{-j})) \in (\mathbb{R}^L)^{I+J-1}$ and a production plan $y_j \in \partial Y_j((x_i),(y_{-j}))$ if $p \in \phi_j(((x_i),(y_{-j})), y_j)$. Competitive behavior is encompassed in this setting when the Y_j have convex values and the elements of $\phi_j(((x_i),(y_{-j})), y_j)$ are normal vectors to $Y_j((x_i),(y_{-j}))$ at y_j.

[29]Notations S_{++} denotes the interior of S and $\mathcal{H}$ the affine space it spans; e is the vector $(\frac{1}{L}, \cdots, \frac{1}{L}) \in \mathbb{R}^L$. Also if $(a_k)_{k\in K}$ is an indexed family of elements, we shall denote it by a when there is no risk of confusion and denote by a_{-k_0} the family consisting of all the a_k but the k_0th. $\mathcal{A}Z$ denotes the asymptotic cone to Z.

[30]Here $((x_i),(y_{-j}))$ stands for a consumption bundle per consumer and a production plan per firm other than j.

The preferences of agent i depend of its consumption of a bundle of commodities x_i in $\mathbb{R}^L_+$ and of its environment $((x_{-i}), (y_j)) \in (\mathbb{R}^L)^{I-1+J}$ determined by the other agents consumption and production choices[31]. Those preferences are represented by an utility function u_i defined on $(\mathbb{R}^L)^{I-1+J} \times \mathbb{R}^L_+$. The consumers are initially endowed with a vector of commodities bundles $(\omega_i) \in (\mathbb{R}^L_+)^m$ and the profit or losses are distributed among them according to revenue functions $r_i(p, (y_j))$ defined on $S \times (\mathbb{R}^L)^n$. The wealth of consumer i at $(\omega_i, p, (y_j))$ then is $w_i = p \cdot \omega_i + r_i(p, (y_j))$. We will consider that consumers are maximizing their utility under their budget constraint and taking the environment as given.

Given a vector of initial endowments $\omega = (\omega_i)$, we shall denote the economy by $\mathcal{E}(\omega)$.

One should remark that the presence of externalities imply that the choices of the agents must satisfy a set of compatibility constraints. We shall call the set $\{((x_i), (y_j)) \in (\mathbb{R}^L)^{m+n} \mid \forall i \ x_i \in \mathbb{R}^L_+, \forall j \ y_j \in Y_j((x_i), (y_{-j}))\}$, the set of compatible consumption-production. In the following, we will introduce an artificial distinction between the actual consumption and production choices of the agents and the state of the environment. In order to simplify the notations, we shall generically denote the environmental parameter within the agents characteristics by $E \in (\mathbb{R}^L)^{(m+n)}$. Unless otherwise specified, E stands for an arbitrary $((x'_i), (y'_j)) \in (\mathbb{R}^L)^{(m+n)}$ (to which the reader should substitute $((x'_i), (y'_{-j}))$ or $((x'_{-i}), (y'_j))$ appropriately).

Let us now introduce the following set of assumptions on the agents characteristics.

Assumption (P)

1. *For all j, Y_j is a lower semi-continuous correspondence with closed graph;*
2. *For all j, for all $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, $Y_j(E) - \mathbb{R}^L_+ \subset Y_j(E)$;*
3. *For all $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, $\mathcal{A}(\prod_{j=1}^{n} Y_j(E)) \cap \{(y_j) \in (\mathbb{R}^L)^n \mid \sum_{j=1}^{n} y_j \geq 0\} = \{0\}$.*

P(1) is a technical regularity assumption on the production correspondences,

[31] Here $((x_{-i}), (y_j))$ stands for a consumption bundle per consumer other than i and a production plan per firm.

P(2) states that firms can freely-dispose of commodities, P(3) will ensure the boundedness of the set of attainable allocations.

Assumption (PR)

For all j , ϕ_j is an upper semi-continuous convex compact valued correspondence from Graph ∂Y_j to S.

This is a standard regularity assumption on the values of the pricing rules.

Assumption (C) *For all i :*

1. *u_i is continuous,*
2. *For all $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, $u_i(E, \cdot)$ is quasi-concave ;*
3. *For all $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, $u_i(E, \cdot)$ is strictly monotone :* $\forall x_i \in \mathbb{R}^L_+$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^L_+/\{0\}$, $u_i(E, x_i) < u_i(E, x_i + \xi)$.
4. *r_i is continuous and for all $(p, (y_j)) \in S \times (\mathbb{R}^L)^n$, one has $\sum_{i=1}^m r_i(p, (y_j)) = p \cdot \sum_{j=1}^n y_j$.*

Let us point out that under assumption C, the behavior of the consumers can be summed up by a demand correspondence

Definition 1 *The demand of agent i, $D_i : (\mathbb{R}^L)^{m+n} \times S_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow R^L_+$, is the correspondence which associates to an environment $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, a price $p \in S_{++}$, and a wealth $w > 0$, the set of elements $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^L_+$ which maximize $u_i(E, \cdot)$ in the budget set $B(p, w) = \{x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x_i \leq w\}$.*

We may then define an equilibrium of the economy as :

Definition 2 *An equilibrium of the economy $\mathcal{E}$ is an element $(\overline{p}, (\overline{x}_i), (\overline{y}_j)) \in S_{++} \times (\mathbb{R}^L_+)^m \times (\mathbb{R}^L)^n$ such that :*

1. *For all i, $\overline{x}_i \in D_i(\overline{E}, \overline{p}, \overline{p} \cdot \omega_i + r_i(\overline{p}, \overline{y}))$*
2. *For all j, $\overline{y}_j \in \partial Y_j(\overline{E})$ and $\overline{p} \in \phi_j(\overline{E}, \overline{y}_j)$*
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \sum_{i=1}^m \omega_i$

with $\overline{E} = ((\overline{x}_i), (\overline{y}_j))$

2.1 Survival and revenue assumptions

Survival assumptions, which ensure the economy produces a positive aggregate wealth in a sufficiently large range of situations, play a crucial role in the establishment of degree formulas, and more generally in the proof of existence of equilibrium (see (1) to (4) and (14), (15)). The simplest form of survival assumption is the interiority of initial endowments in a pure exchange economy. In presence of increasing returns, the survival assumption must encompass the possibility of losses in the production sector and hence is of the form, for every $(p,(y_j),\omega') \in X, p\cdot(\sum_{j=1}^n y_j+\omega') > 0$, where p stands for the market price, y_j the production of firm j, ω' a vector of initial resource for the economy and X some subset of the set of production equilibria. Now, the restriction the assumption imposes on the primitives of the economy may be measured by the size of the set X on which one requires it to hold.

Generally, W is a subset of the set of production equilibria. Therefore, we shall first define the notion of production equilibrium for a given environment :

Definition 3 *An element $(p,(y_j)) \in S\times\prod_{j=1}^n \partial Y_j(E)$ is a production equilibrium for the environment $E \in \mathbb{R}^{L(m+n)}$ if for all j, $p \in \phi_j(E,y_j)$. We denote the set of those production equilibria by $EP(E)$.*

Now, in the course of the paper, we shall use two types of survival assumptions. The first type is weak in the sense that it bares only on the set of attainable productions, and hence is somehow an actual constraint. Of this kind, we shall posit for a given environment :

Assumption $(SA_0(E,\omega))$ *For all $(p,(y_j)) \in EP(E)$ such that $\sum_{j=1}^n y_j+\sum_{i=1}^m \omega_i \geq 0$, we have $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i \neq 0$.*

which guarantees that the economy never wastes all its resources and

Assumption $(SA(E,\omega))$ *For all $(p,(y_j)) \in EP(E)$ such that $\sum_{j=1}^n y_j+\sum_{i=1}^m \omega_i \geq 0$, we have $p\cdot(\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0$.*

which guarantees the economy produces a positive wealth. The analogous of this assumption on the set of compatible consumption-production is :

Assumption $(SA(\omega))$ *For all* $(p,(x_i),(y_j)) \in S \times \prod_{i=1}^m (\mathbb{R}_+^L) \times \prod_{j=1}^n Y_j((x_i)(y_{-j}))$ *such that* $(p,(y_j)) \in EP((x_i),(y_j))$ *and* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i \geq 0$*, one has* $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0$.

Our last assumption is of a different type, and more closely related to the one standardly used in the literature. It bares on a larger set than this of attainable production allocations. It guarantees the economy could produce a positive wealth for every production which becomes attainable when the initial resources are sufficiently increased :

Assumption $(SSA(E,\omega))$ *Assumption* $SA(E,\omega')$ *holds for all* $\omega' \geq \omega$.

Our main result necessitates the conjunction of assumptions $SA(\omega)$, $SA_0(E',\omega)$ on a sufficiently large compact set of environments E' and $SSA(E_0,\omega)$ for one environment E_0. Hence, the main requirement bares on a single fixed environment, in accordance with the point of view presented in the introduction. On the contrary the previous literature on existence, in particular (1) and (4), posit assumption of the type "$SA(\omega')$ holds for all $\omega' \geq \omega$." That is, it imposes conditions for non-attainable allocations which satisfy the compatibility constraints. This prevents the comparison between our results and those of the literature in terms of generality. Both should rather be seen as complementary. Also note that our assumptions are clearly satisfied in a competitive setting *à la* Laffont, (17) and in the many other cases discussed in the last section.

Finally, we shall refer to the following revenue assumptions to ensure that the working of the economy provides a positive wealth to every agent :

Assumption $(R(\omega))$ *For all* $(p,(x_i),(y_j)) \in S \times \prod_{i=1}^m (\mathbb{R}_+^L) \times \prod_{j=1}^n Y_j((x_i)(y_{-j}))$ *such that* $(p,(y_j)) \in EP((x_i),(y_j))$, $p \in S_{++}$ *and* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i \geq 0$*, one has* $p \cdot \omega_i + r_i(p,(y_j)) > 0$.

3 Characterization of Equilibria

The remaining of this paper is concerned with the computation of the degree of a correspondence characterizing the equilibria of $\mathcal{E}(\omega)$. One could then impose additional properties on the (excess) demand such as the generalized law of demand or gross-subsituability (see (15)) in order to obtain uniqueness results, but the first step remains to characterize the equilibria of $\mathcal{E}(\omega)$ as zeroes of a sufficiently regular correspondence. Therefore we have to choose a convenient domain and to sum up adequately the consumers behavior. We shall use therefore quasi-demand correspondences and auxiliary revenue functions. Let us preliminary describe those constructions.

3.1 Definition of the domain

Let us notice that following Laffont (17) under assumption P and C there exists a compact ball of $\mathbb{R}^L$, K, such that the attainable allocations, $\{((x_i),(y_j)) \in \prod_{i=1}^m \mathbb{R}_+^L \times \prod_{j=1}^n Y_j((x_i),(y_{-j})) \mid \sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i = \sum_{i=1}^m x_i\}$ lie in the interior of K^{m+n}.

Moreover, under assumption P the set

$$\cup_{E\in\ K^{(m+n)}}\{((x_i),(y_j)) \in \prod_{i=1}^m \mathbb{R}_+^L \times \prod_{j=1}^n Y_j(E) \mid \sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i = \sum_{i=1}^m x_i\}.$$

of allocations "attainable for at least an environment in K^{m+n}" is compact and hence is contained in the interior of a certain K_1^{m+n} where K_1 is a compact ball of $\mathbb{R}^L$.

Let us now recall that according to Lemma 5 in Bonnisseau-Cornet (3) , assumption $P(ii)$ implies that for all E the restriction of $proj_{e^\perp}$ to $\partial Y_j(E)$ is an homeomorphism. Its inverse $\Lambda_j(E,\cdot)$ is obtained by associating to an element of $e^\perp$ the element of $\partial Y_j(E)$ reached[32] by moving along the direction given by e. Hence, one can define an application $\Lambda_j : (\mathbb{R}^L)^{m+n} \times e^\perp \to \cup_{E\in(\mathbb{R}^L)^{m+n}}\partial Y_j(E)$. This application is continuous according to Lemma 3.1 in Bonnisseau (1) .

Finally we define the set $U = \{(p,(s_j),(\omega_i),E) \in S_{++}\times(e^\perp)^n\times\mathbb{R}^{Lm}\times int(K_1)^{m+n} \mid e\cdot(\sum_{j=1}^n \Lambda_j(proj_{K^{m+n}}E,s_j) + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0\}$. This set is an open subset of $\mathcal{H} \times (e^\perp)^n \times \mathbb{R}^{Lm} \times (\mathbb{R}^L)^{m+n}$ and hence an oriented manifold. It will serve as a domain for the equilibrium correspondence.

[32]Such an element is always reached thanks to the free-disposal assumption

3.2 Characterization of consumers behavior

In order to sum up the consumers behavior, we shall use the notion of quasi-demand. Considering the quasi-demand instead of the demand allows us to allow for zero incomes in the course of the proof and hence to dispense of additional survival assumptions. The quasi-demand is defined as :

Definition 4 *The quasi-demand of agent i, $Q_i : (\mathbb{R}^L)^{m+n} \times S_{++} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow R^L$, is the correspondence which associates to an environment $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, a price $p \in S_{++}$ and a wealth $w \geq 0$, the set of elements $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^L_+$ such that $p \cdot \overline{x}_i \leq w$ and such that for every element $x_i \in B'(p,w) = \{x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x_i < w\}$ one has $u_i(E, \overline{x}_i) \geq u_i(E, x_i)$.*

and inherits the following properties from the quasi-demand without externalities (see Florenzano (11)) :

Lemma 1 *Under assumption C*

1. *Q_i is an upper semi-continuous correspondence with non-empty convex compact values.*
2. *For every $(E,p,w) \in (\mathbb{R}^L)^{m+n} \times S_{++} \times \mathbb{R}_{++}$, one has $Q_i(E,p,w) = D_i(E,p,w)$*
3. *For every $(E,p,w) \in (\mathbb{R}^L)^{m+n} \times S_{++} \times \mathbb{R}_{++}$, and every $x_i \in Q_i(E,w,p)$, one has $p \cdot x_i = w$*
4. *For every $E \in (\mathbb{R}^L)^{m+n}$, if (p_n, w_n) is a sequence in $S_{++} \times \mathbb{R}^L_{++}$ converging to (p,w) such that $w > 0$ and $p \notin S_{++}$ then $Q_i(E, p_n, w_n) \cdot e \rightarrow +\infty$*

Unfortunately, the quasi-demand may fail to be well-defined on U because some consumers may have a negative wealth at some points. In order to overcome this difficulty we introduce auxiliary incomes. Borrowing the idea of Lemma 2 in (14), we have :

Lemma 2 *There exist continuous mappings $\tilde{r}_i$ defined on $W := \{(p,(y_j),(\omega_i)) \in S \times \prod_{j=1}^n \partial Y_j \times (\mathbb{R}^L)^m_+ \mid e \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0\}$ and with values in $\mathbb{R}$ such that :*

1. *For $(p,(y_j),(\omega_i)) \in W$, one has for all i, $\tilde{r}_i(p,(y_j),(\omega_i)) + p \cdot \omega_i \geq 0$*

2. *For* $(p,(y_j),(\omega_i)) \in W$, *if* $\sum_{i=1}^m \omega_i + \sum_{j=1}^n y_j \geq 0$ *one has* $\sum_{i=1}^m \tilde{r}_i(p,(y_j),(\omega_i)) = p \cdot \sum_{j=1}^n y_j$

3. *For all* $(p,(y_j),(\omega_i)) \in W$, *if* $p \cdot (\sum_{i=1}^m \omega_i + \sum_{j=1}^n y_j) > 0$ *one has for all* i, $\tilde{r}_i(p,(y_j),(\omega_i)) + p \cdot \omega_i > 0$

4. *For* $(p,(y_j),(\omega_i)) \in W$ *if for all* i $p \cdot \omega_i + r_i(p,(y_j)) > 0$ *then for all* i, $r_i(p,(y_j)) = \tilde{r}_i(p,(y_j),(\omega_i))$

Proof: *Let us set following (14), for* $(p,(y_j),(\omega_i)) \in W$, $\tilde{r}_i(p,(y_j),(\omega_i)) := \chi_{\{p\cdot(\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0\}} \left((1-\theta(\rho))\frac{\sum_{i=1}^m \rho_i}{m} + \theta(\rho)\rho_i\right) - p \cdot \omega_i$
where,
– χ_E *is the indicator of the set* E *assigning the value* 1 *to elements of this set and* 0 *to elements outside.*
– $\rho = (\rho_i) = p \cdot \omega_i + r_i(p,(y_j))$
– $\theta(\rho) = \begin{cases} 1, & if\ for\ all\ i \quad \rho_i > 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^m \rho_i}{\sum_{i=1}^m \rho_i - m \inf_k \rho_k}, & otherwise \end{cases}$

According to Jouini (14) The mappings $\tilde{r}_i$ *satisfy conditions* 3 *and* 4 *and are continuous on the set* $\{(p,(y_j),(\omega_i)) \in S \times \prod_{j=1}^n \partial Y_j \times (\mathbb{R}^L)_+^m \mid p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0\}$. *Now as* $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i)$ *tends towards zero, each of the* $\tilde{r}_i$ *tends towards* $-p \cdot \omega_i$. *Thanks to the indicator function, the* $\tilde{r}_i$ *are continuously extended to the whole* W *with the value* $-p \cdot \omega_i$. *They hence are continuous and moreover satisfy conditions* 1 *and* 2.

In the following we will summarize consumer i behavior by the quasi-demand with auxiliary income which we shall denote, for sake of simplicity, by $Q_i(E,p,(s_j),(\omega_i))$ instead of $Q_i(E,p,\tilde{r}_i(p,\Lambda_j(E,s_j),(\omega_i)) + p \cdot \omega_i)$. This mapping is well-defined, upper semi-continuous with compact and convex values on U.

3.3 Equilibrium Correspondence

We can then define the equilibrium correspondence by

$$F_1 : U \to \mathcal{H} \times (e^{\perp})^n \times \mathbb{R}^{Lm} \times \mathbb{R}^{L(m+n)}$$

with $F_1(p,(s_j),(\omega_i),(x_i),(y_j)) =$

$$\left(\begin{array}{c} proj_{\mathcal{H}}(\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i=1}^{m} \omega_i), \\ (\phi_j(E,\Lambda_j(E,s_j)) - p), \\ (\omega_i),(x_i - Q_i(E,p,(s_j),(\omega_i))),(y_j - \Lambda_j(E,s_j)) \end{array}\right)$$

Here $E = ((x_i),(y_j))$, so that $((x_i),(y_j))$ represents the environment as well as the agents consumption and production choices.

This correspondence is upper semi-continuous with compact and convex values on U and characterize the equilibria of the economy in the sense of the following proposition :

Proposition 1 *Under assumptions $R(\omega)$ and $SA(\omega)$ $(p,(s_j),\omega,(x_i),(y_j)) \in F_1^{-1}(e,0,\omega,0,0)$ if and only if $(p,(x_i),(y_j))$ is an equilibrium of $\mathcal{E}(\omega)$ and $s_j = proj_{e^\perp}(y_j)$ for all j.*

Proof: *Let $(p,(s_j),\omega,(x_i),(y_j)) \in F_1^{-1}(e,0,\omega,0,0)$. The last equations imply that for all i, $x_i \in Q_i(((x_i),(y_j)),p,(s_j),(\omega_i))$ and that for all j, $y_j = \Lambda_j(((x_i),(y_j)), s_j))$. Hence the environment compatibility constraint are satisfied. Moreover for all j, $s_j = proj_{e^\perp}(y_j)$.*

Now, given the construction of the auxiliary incomes they are whether all positive whether all null. In the latter case, one has for all i, $Q_i(((x_i),(y_j)),p,(s_j),\omega_i) = 0$. The first equation then implies $proj_{e^\perp}(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m}\omega_i) = 0$. As moreover $(p,(s_j),(\omega_i),((x_i),(y_j))) \in U$, one has $e \cdot (\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m}\omega_i) > 0$. This clearly implies $(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m}\omega_i) \geq 0$, but one then has using assumption $SA(\omega)$ that $p\cdot(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m}\omega_i) > 0$. This contradicts the nullity of the auxiliary incomes. Hence all the auxiliary incomes are strictly positive and the quasi-demands coincide with the demands. The latter implies Walras law holds. Hence one has $\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j - \omega = ke$ according to the first equation and $p\cdot(\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j - \omega) = 0$ according to Walras law. Taking the scalar product of the first equation with p yields that $k = 0$ and hence that $\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j - \omega = 0$. Using assumption $SA(\omega)$ and $R(\omega)$ one then obtains that the auxiliary incomes coincide with the regular ones. The remaining equations imply that $(p,(y_j))$ is a production equilibrium, and hence that $(p,(x_i),(y_j))$ is an equilibrium of $\mathcal{E}(\omega)$.

Conversely, every equilibrium $(p,(x_i),(y_j))$ satisfies $p \in S_{++}$ because of the boundary condition on the demand given in Lemma 1, and $((x_i),(y_j)) \in intK_1^{m+n}$ be-

cause an equilibrium allocation is an attainable allocation. Hence $(p, (proj_{e^\perp}(y_j)), \omega, (x_i), (y_j)) \in U$. *It is then clear that its image by* F_1 *is* $(e, 0, \omega, 0, 0)$. $\square$

It remains to compute the degree of this correspondence. That is the aim of the following section.

4 Index Formula

4.1 Degree of auxiliary economies

Let us remark that F_1 is very similar to the equilibrium correspondence of an economy where the environment is fixed equal to E (this is more precisely stated in Lemma 3). In order to use this analogy, let us first focus on auxiliary economies with a fixed environment. More precisely, let us associate to the environment $E_0 \in intK^{m+n}$, the auxiliary artificial economy $\mathcal{E}_{E_0}(\omega)$. In this economy the agents characteristics are defined as the images of the characteristics $(u_i), (Y_j, \phi_j)$ at E_0, and the incomes are the auxiliary ones. An equilibrium of such an economy can be defined as :

Definition 5 *An equilibrium of the economy* $\mathcal{E}_{E_0}(\omega)$, *is an element* $(\overline{p}, (\overline{x}_i), (\overline{y}_j)) \in S \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}_+^L \times \prod_{j=1}^n Y_j(E_0)$ *such that :*

1. *For all* i, $\overline{x}_i \in D_i(E_0, \overline{p}, \overline{p} \cdot \omega_i + \tilde{r}_i(\overline{p}, (\overline{y}_j))$
2. *For all* j, $\overline{y}_j \in \partial Y_j(E_0)$ *and* $\overline{p} \in \phi_j(E_0, \overline{y}_j)$
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \sum_{i=1}^m \omega_i$

Now, if one sets

$$V := \{(p, (s_j), (\omega_i)) \in S_{++} \times (e^\perp)^n \times \mathbb{R}^{Lm} \mid p \cdot (\sum_{j=1}^n \Lambda_j(E_0, s_j) + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0\}$$

and $G_{E_0} : V \to \mathcal{H} \times (e^\perp)^n \times \mathbb{R}^{Lm}$ with $G_{E_0}(p, (s_j), (\omega_i)) =$

$$\begin{pmatrix} proj_{\mathcal{H}}(\sum_{i=1}^m D_i(E_0, p, \tilde{r}_i(p, \Lambda_j(E_0, s_j), (\omega_i)) + p \cdot \omega_i) - \sum_{j=1}^n \Lambda_j(E_0, s_j) - \sum_{i=1}^m \omega_i), \\ (\phi_j(E_0, \Lambda_j(E_0, s_j)) - p), \\ (w_i). \end{pmatrix}$$

One has, following Jouini (14) :

Proposition 2 *Under assumption $SA(E_0, \omega)$, an element $(p, (s_j)) \in S_{++} \times (e^{\perp})^n$ entails an equilibrium of $\mathcal{E}_{E_0}(\omega)$, if and only if $G_{E_0}(p, (s_j), (\omega_i)) = (e, 0, \omega)$.*

Moreover, Jouini (14) and (15) allows us to compute the degree of this correspondence in a wide range of situation.

Proposition 3 *Under assumptions (P), (PR), (C), $SSA(E_0, \omega)$ and if for all j, $\phi_j(E_0, .)$ has bounded losses* [33], *one has,*

$$deg(G_{E_0}, (e, 0, \omega)) = (-1)^{L-1}.$$

Proof: *This is a direct consequence of Theorem* 5.1 *in (14) where it is shown this degree is equal to* $(-1)^{L-1}$. $\square$

Proposition 4 *Under assumptions (P), (PR), (C), $SSA(E_0, \omega)$ and if for all j, $\phi_j(E_0, .)$ is the marginal pricing rule*[34], *one has*

$$deg(G_{E_0}, (e, 0, \omega)) = (-1)^{L-1}.$$

Proof: *This is a direct consequence of Jouini (15) which uses the property of the marginal pricing rule under the survival assumption derived in (5).*

4.2 Computation of the degree of F_1

It remains to link the degree of the equilibrium correspondence F_1 with this of G_{E_0}. We shall therefore use the invariance by homotopy property of the degree. Indeed, let us define for $t \in [0, 1]$, the family of correspondences

$$F_t^{E_0} : U \to \mathcal{H} \times (e^{\perp})^n \times \mathbb{R}^{Lm} \times \mathbb{R}^{L(m+n)}$$

by $F_t^{E_0}(p, (s_j), (\omega_i), (x_i), (y_j)) =$

[33] That is for all j, there exist a scalar α_j such that for all $y_j \in \partial Y_j(E_0)$ and all $p \in \phi_j(E_0, y_j)$, $p \cdot y_j \geq \alpha_j$

[34] By marginal pricing rule, we mean the restriction of Clarke's normal to the simplex, $N_{Y_j(E_0)}(y_j) \cap S$, see (7).

$$\begin{pmatrix} proj_{\mathcal{H}}(\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m \omega_i), \\ (\pi(\phi_j(E_t, \Lambda_j(E_t, s_j)), t) - p), (w_i), \\ (x_i - Q_i(E_t, p, (s_j), (\omega_i)), (y_j - \Lambda_j(E_t, s_j)) \end{pmatrix}$$

where E stands for $((x_i), (y_j))$, E_t stands for $proj_{K^{m+n}}(tE + (1-t)E_0)$ and π is the mapping from $S \times [0,1]$ to S defined in the appendix.

One should note that whatever may $E_0 \in intK^{m+n}$ be, $F_1^{E_0}$ exactly is the equilibrium correspondence F_1. Moreover $F_0^{E_0}$ which is in fact equal to

$$\begin{pmatrix} proj_{\mathcal{H}}(\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m \omega_i), \\ (\phi_j(E_0, \Lambda_j(E_0, s_j))) - p), (w_i), \\ (x_i - Q_i(E_0, p, (s_j), (\omega_i))), (y_j - \Lambda_j(E_0, s_j)) \end{pmatrix}$$

correspond to a situation where the environment is fixed equal to E_0. Precisely, one has :

Lemma 3 *Under assumptions* (P), (PR), (C), $SA(E_0, \omega)$, *the degree of* $F_0^{E_0}$ *at* $(e, 0, \omega, 0, 0)$ *is equal to this of* G_{E_0} *at* $(e, 0, \omega)$.

Proof: *It suffices to remark that under assumptions* $SA(E_0, \omega)$, *all the zeroes of* $F_0^{E_0}$ *belong to* $V \times int(K_1^{m+n})$ *and that on this open set,* $F_0^{E_0}$ *is homotopic to* $G_{E_0} \times (0,0)$, *whose degree at* $(e, 0, \omega, 0, 0)$ *is equal to this of* G_{E_0} *at* $(e, 0, \omega)$ $\square$

It remains to show that the homotopy $F_t^{E_0}$ conserves the degree. It is indeed the case, one has :

Lemma 4 *Assume assumptions* (P), (PR), (C), $SA(\omega)$, $SA(E_0, \omega)$ *and for all* $E \in K^{m+n}$ $SA_0(E, \omega)$ *hold. One has :*

$$deg(F_0^{E_0}, (e, 0, \omega, 0, 0)) = deg(F_1^{E_0}, (e, 0, \omega, 0, 0))$$

Proof: *For sake of simplicity, we denote* $F_t^{E_0}$ *by* F_t *in the course of the proof.*

Clearly F_t defines an homotopy between F_1 and F_0 and all the F_t are s.c.s with non-empty convex compact values. Let us then show that the set $\cup_{\tau\in[0,1]} F_\tau^{-1}(e,0,\omega,0,0)$ is compact in U.

Indeed, consider a sequence $(p^n,(s_j^n),\omega,(x_i^n),(y_j^n)) \in \cup_{\tau\in[0,1]}F_\tau^{-1}(e,0,\omega,0,0)$. For all n there exist t^n such that $(e,0,\omega,0,0) \in F_{t^n}(p^n,(s_j^n),\omega,(x_i^n),(y_j^n))$.

In the following, we let E_{t_n} stand for $proj_{K^{m+n}}(t^n((x_i^n),(y_j^n)) + (1-t^n)E_0)$.

One has for all n, that $(x_i^n) \in Q_i(E_{t_n},p^n,(s_j^n),(\omega_i))$ and $y_j^n = \Lambda_j(E_{t_n},s_j^n)$

Now, as in the proof of Proposition 1, one has
- *whether all the incomes are zero and one has $x_i^n = 0$, so that $e\cdot(\sum_{j=1}^n y_j^n + \omega) > 0$ together with the first equation imply $\sum_{j=1}^n y_j^n + \omega \geq 0$ and $x_i^n = 0$,*
- *whether all the income are strictly positive and together with Walras law, this implies $\sum_{j=1}^n y_j^n + \omega \geq \sum_{i=1}^m x_i^n \geq 0$.*

Anyhow, together with the last equations, this implies $((x_i^n),(y_j^n))$ is an attainable allocation for the environment E_{t_n} and hence belongs to the interior of $(K_1)^{m+n}$. Due to the continuity of the projection on $(e^\perp)$ and the compacity of K_1, this implies that for all j, s_j^n lie in a compact set.

Finally as ϕ_j has values in S, one has $p^n \in S$

To sum up, $(p^n,(s_j^n),\omega,(x_i^n),(y_j^n),t^n)$ belongs to a compact subset of $S\times(e^\perp)^n\times\mathbb{R}^{Lm}\times K_1^{(m+n)}\times[0,1]$ and hence has a subsequence converging inside this set. Let us denote by $(p,(s_j),(\omega_i),(x_i),(y_j),t)$ its limit. It remains to show that $(p,(s_j),(\omega_i),(x_i),(y_j))$ is in U.

In the following, we let E_t stand for $proj_{K^{m+n}}(t((x_i),(y_j)) + (1-t)E_0)$.

First $((x_i),(y_j))$ belongs to the interior of $(K_1)^{m+n}$ because it is an attainable allocation for the environment E_t.

Second, the continuity properties of ϕ_j and π imply that $p \in \pi(\phi_j(E_t,\Lambda_j(E_t,s_j))),t)$.

Now
- *whether $t \in]0,1[$ and p belongs to the set S_t defined in the appendix which is a closed subset of S_{++}. Hence $p\in S_{++}$. Also, as $\sum_{j=1}^n \Lambda_j(E_t,s_j))+\sum_{i=1}^m \omega_i \geq 0$, using assumption $SA_0(E_t)$ and Lemma 6 in the appendix, one has $e\cdot(\sum_{j=1}^n \Lambda_j(E_t,s_j)+\sum_{i=1}^m \omega_i) > 0$. Moreover by continuity, $x_i \in Q_i(E_t,p,(s_j),(\omega_i))$. To sum up , we have proved that if $t \in]0,1[$, $(p,s_j,\omega,(x_i),(y_j)) \in \cup_{\tau\in[0,1]}F_\tau^{-1}(e,0,\omega,0,0)$;*

– *wether* $t = 0$ *or* $t = 1$ *so that* $\pi(\cdot, t)$ *coincide with identity on* S, *and* $E_t = E$ *or* E_0. *Hence* $p \in \phi_j(E_t, s_j)$. *As moreover* $\sum_{j=1}^{n} \Lambda_j(E_t, s_j)) + \sum_{i=1}^{m} \omega_i \geq 0$, *the survival assumptions* $SA(\omega)$ *or* $SA(E_0, \omega)$ *imply that* $p \cdot (\sum_{j=1}^{n} \Lambda_j(E_t, s_j) + \sum_{i=1}^{m} w_i) > 0$ *and therefore* $\tilde{r}_i(p, \Lambda_j(E_t, s_j), \omega_i) + p \cdot \omega_i > 0$. *Given the fact that for all* n, (x_i^n) *belongs to a compact set, the boundary condition stated in Lemma 1 implies that* $p \in S_{++}$. *Then by continuity,* $x_i \in Q_i(E_t, p, (s_j), (\omega_i))$. *So, we have in this case also* $(p, (s_j), (\omega_i), (x_i), (y_j)) \in \cup_{\tau \in [0,1]} F_t^{-1}(e, 0, \omega, 0, 0)$.

Finally, we have shown that $\cup_{\tau \in [0,1]} F_t^{-1}(e, 0, \omega, 0, 0)$ *is compact. Using conservation of the degree by homotopy (6), this implies that*

$$deg(F_0, (e, 0, \omega, 0, 0)) = deg(F_1, (e, 0, \omega, 0, 0)).$$

4.3 Results

Using the degree theory of production economies without externalities (cf proposition 3 and 4) together with lemmas 3 and 4 one can compute the degree of the equilibrium correspondence F_1 in a wide range of situations and deduce as corollaries existence of equilibrium in $\mathcal{E}(\omega)$. In order to state those results as concisely as possible, let us sum up the weak forms of survival assumption we need into,

Assumption (S(ω)) *Assumptions* $SA(\omega)$ *and, for all* $E \in K^{m+n}$, $SA_0(E, \omega)$ *hold true.*

We then have

Corollary 1 *Under assumptions* (P), (PR), (C), $S(\omega)$ *and* $R(\omega)$, *if there exists an environment* $E_0 \in intK^{m+n}$ *such that assumptions* $SSA(E_0, \omega)$ *hold and such that the pricing rules,* $\phi_j(E_0, \cdot)$, *have bounded losses, then, the degree of the equilibrium correspondence* F_1 *at* $(e, 0, \omega, 0, 0)$ *is equal to* $(-1)^{L-1}$ *and there exists an equilibrium in the economy* $\mathcal{E}(\omega)$.

In particular, one has for loss free pricing rules for which the survival assumptions are satisfied as soon as the initial endowments satisfy an interiority condition :

Corollary 2 *Under assumptions* (P), (PR), (C), *if the pricing rules are loss-free for every environment* $E_0 \in intK^{m+n}$ *and for all* i, $\omega_i \in \mathbb{R}^L_{++}$, *then, the degree of* *the equilibrium correspondence* F_1 *at* $(e, 0, \omega, 0, 0)$ *is equal to* $(-1)^{L-1}$ *and there exists an equilibrium in the economy* $\mathcal{E}(\omega)$.

This encompasses the case of competitive behavior :

Corollary 3 *If assumptions* (P) *and* (C) *hold, if for all* i, $(\omega_i) \in \mathbb{R}^L_{++}$, *if for all* j *the production correspondences have convex values containing* 0 *and if the producers maximize their profit, then the degree of the equilibrium correspondence* F_1 *at* $(e, 0, \omega, 0, 0)$ *is equal to* $(-1)^{L-1}$ *and there exists an equilibrium in the economy* $\mathcal{E}(\omega)$.

Proof: *Indeed, in this framework, the pricing rule coincide with the restriction to* S *of the normal cone of convex analysis and satisfy all the properties required by Corollary* 2.

Let us now turn to marginal pricing behavior given by the restriction to the simplex of Clarke's (7) normal cone :

Corollary 4 *Under assumptions* (P), (PR), (C), $S(\omega)$ *and* $R(\omega)$, *if the pricing rule coincide with marginal pricing for every environment, and if there exists an environment* $E_0 \in intK^{m+n}$ *such that assumptions* $SSA(E_0, \omega)$ *hold, then, the degree of the equilibrium correspondence* F_1 *at* $(e, 0, \omega, 0, 0)$ *is equal to* $(-1)^{L-1}$ *and there exists a marginal pricing equilibrium in the economy* $\mathcal{E}(\omega)$.

However, one should notice that according to Bonnisseau-Médecin (4), Clarke's normal cone does not necessarily satisfy assumption (PR) because its graph may not be closed. Sufficient conditions for the marginal pricing rule to satisfy the assumption (PR) is that Y_j has convex values or that the following additional smoothness requirement hold (cf (4)) :

Assumption (PS) *For every* $j = 1, ..., n$, *there exists a function* $g_j : (\mathbb{R}^L)^{(m+n)} \times \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ *such that for every* $E \in (\mathbb{R}^L)^{(m+n)}$,

1. $Y_j(E) = \{y \in \mathbb{R}^L \mid g_j(E, y) \leq 0\}$;
2. g_j *is continuous on* $(\mathbb{R}^L)^{(m+n)} \times \mathbb{R}^L$;

3. *g_j is differentiable with respect to the last variable. The corresponding partial gradient $\nabla_y g_j$ is continuous on $(\mathbb{R}^L)^{(m+n)} \times \mathbb{R}^L$;*

4. *$g_j(E, y) = 0$ implies $\nabla_y g_j(E, y) \in \mathbb{R}^L_{++}$ and $g_j(E, 0) = 0$.*

Last, one also has an index formula for pricing rules which correspond to perturbations of the marginal one :

Corollary 5 *Under assumptions (P), (PR), (C), $S(\omega)$ and $R(\omega)$, if there exists an environment $E_0 \in int K^{m+n}$ such that assumptions $SSA(E_0, \omega)$ hold and such that the pricing rules $\phi_j(E_0, \cdot)$ coincide with the marginal pricing rules, then, the degree of the equilibrium correspondence F_1 at $(e, 0, \omega, 0, 0)$ is equal to $(-1)^{L-1}$ and there exists an equilibrium in the economy $\mathcal{E}(\omega)$.*

5 Appendix

Definition 6 *π is the mapping from $S \times [0, 1]$ to S defined by $\pi(p, t) = \frac{p+\alpha min(t,1-t)e}{\|p+\alpha min(t,1-t)e\|_1}$ where α is an arbitrary small positive number given by the following lemma.*

The mapping π is introduced for technical purposes, namely to ensure that when $(p, (s_j), (\omega_i), E)$ is a zero of F_t for some t in $]0, 1[$ then $p \in S_{++}$. Note in this respect that it is a continuous function such that $\pi(S, t) \subset S_t = \{p \in S \mid \forall \ell\ p_\ell \geq \alpha \frac{min(t,1-t)}{2L}\}$, while $\pi(\cdot, 1)$ and $\pi(\cdot, 0)$ coincide with identity on S. Moreover, one has :

Lemma 5 *If assumption $SA_0(E, \omega)$ holds for all $E \in K^{m+n}$, then for $\alpha > 0$ small enough, one has for all $t \in [0, 1]$:*
For all (p, y_j) such that $(y_j) \in K_1^n$, $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0$ and $p \in \cup_{E \in K^{m+n}} \cap_j \pi(\phi_j(E, y_j), t)$, one has $e \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \omega) > 0$.

Proof: *Indeed let us consider the set $\Theta_\mu = \{(p, y_j) \in S \times (\mathbb{R}^L)^n \mid (y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j \cap K_1^n,\ \sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0,\ and\ \ p \in \cup_{E \in K^{m+n}} B(\cap_j \phi_j(E, y_j), \mu)\}$.*

where $B(X,\mu)$ is the set of elements at a distance less or equal to μ of X. Due to the upper-semi continuity of the pricing rules and the compacity of K and K_1, Θ_μ is a compact set.

Now, let us show that for μ small enough any element $(y_j) \in proj_{\prod_{j=1}^n Y_j}\Theta_\mu$ is arbitrarily close to $proj_{\prod_{j=1}^n Y_j}\Theta_0$. Otherwise there exist a sequence of elements $(y_j^n) \in proj_{\prod_{j=1}^n Y_j}\Theta_{\frac{1}{n}}$ which is uniformly bounded away of $proj_{\prod_{j=1}^n Y_j}\Theta_0$. Now $proj_{\prod_{j=1}^n Y_j}\Theta_{\frac{1}{n}}$ is a decreasing sequence of compact sets. So that (y_j^n) has a converging subsequence. Due to the continuity of π and of the pricing rules, the limit of this sequence is in $proj_{\prod_{j=1}^n Y_j}\Theta_0$. This contradicts the preceding, hence for μ small enough $proj_{\prod_{j=1}^n Y_j}\Theta_\mu$ is arbitrarily close to $proj_{\prod_{j=1}^n Y_j}\Theta_0$.

On another hand the compacity of Θ_0 and the fact that assumption $SA_0(E,\omega)$ holds for all $E \in K^{m+n}$ imply that there exists $\epsilon > 0$ such that one has for all $(p,(y_j)) \in \Theta_0$, $e \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \omega) > \epsilon$.

According to the preceding, the same inequality holds with $\frac{\epsilon}{2}$ for every element $(y_j) \in proj_{\prod_{j=1}^n Y_j}\Theta_\mu$, provided μ is chosen small enough.

Now, for all $t \in [0,1]$, one has $\|p - \pi(p,t)\| \leq k\alpha$ for a certain fixed k, so that if α is chosen small enough every element (p, y_j) such that $(y_j) \in K_1^n$, $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0$ and $p \in \cup_{E\in K^{m+n}} \cap_j \pi(\phi_j(E,y_j),t)$ belongs to Θ_μ with μ arbitrarily small. This ends the proof.

Bibliographie

[1] Bonnisseau, J-M. (1997) “Existence of Equilibria in Economies with Externalities and Nonconvexities. ” Set-Valued Analysis, Volume 5, Number 3, pp. 209-226(18)

[2] Bonnisseau, J-M. (2003) “Regular economies with non-ordered preferences. ” Special issue on the Athens-Minnesota Conferences . J. Math. Econom. 39, no. 3-4, 153–174.

[3] Bonnisseau, J-M. and Cornet, B. (1988) “ Existence of equilibria when firms follow bounded losses pricing rules.” J. Math. Econom. 17 (1988), pp 193-207

[4] Bonnisseau, J-M. and Médecin, J-P (2001). “ Existence of marginal pricing equilibria in economies with externalities and non-convexities.” J. Math. Econom. 36, no. 4, 271–294.

[5] Bonnisseau, J-M. (1992)“Existence of equilibria in the presence of increasing returns : A synthesis” J. Math. Econom. vol. 21(5), pp 441-452.

[6] Cellina, A. and Lasota, A. (1969). – “A New Approach to the Definition of Topological Degree for Multivalued Mappings”, Atti della Academia Nazionale dei Lincei, Rendiconti. Classe de Scienze Fisiche, Mathematiche e Naturali, 47, pp. 434-440.

[7] Clarke, F. (1983), “Optimization and nonsmooth analysis” Wiley, New York.

[8] Del Mercato, E. L.(2006), “Existence of competitive equilibria with externalities : A differential viewpoint” J. Math. Econom. 42 525–543.

[9] Dierker, E. (1982). “Regular Economies” in Handbook of Mathematical Economics, Vol. 2, edited by K. J. Arrow and M. D. Intriligator, New York, North Holland.

[10] Dierker, E. (1974). “Topological Methods in Walrasian Economics.” Lecture notes on Economics and mathematical Sciences, 92. Springer-Verlag : Berlin.

[11] Florenzano, M. (2003) "General Equilibrium Analysis. Existence and Optimality of Equilibria" Kluwer, Boston/Dordrecht/London.

[12] Giraud, G. (2001) "An algebraic index theorem for non-smooth economies" Journal of Mathematical Economics, V. 36(4), pp. 255-269.

[13] Granas, A. (1959), "Sur la notion de degré topologique pour une certaine classe de transformations multivalentes dans les espaces de Banach", Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sc. Math. Astronom. Phys., 7 , 191-194.

[14] Jouini, E. (1992) "An Index Theorem for Nonconvex Production Economies", Journal of Economic Theory, 57 (1), 176-196, 1992.

[15] Jouini, E. (1992) "Unicité et stabilité de l'équilibre dans une économie de production avec règle de tarification marginale : les cas convexe et non-convexe", Annales d'Economie et de Statistique, 44 : 159-176.

[16] Kehoe,T. (1980) "An index theorem for general equilibrium models with production" , Econometrica. 48(5) : 1211-32

[17] Laffont, J, J. (1978) "Effets externes et théorie économique", Monographie du Séminaire d'économétrie. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

[18] Mas-Colell, A (1985) "The Theory of General Economic Equilibrium : A Differentiable Approach" Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[19] Starret, D.A. (1972) "Fundamental non convexities in the theory of externalities "Journal of Economic Theory n°4 :180-199.

Chapitre 2

Existence d'équilibres après l'ouverture d'un marché de droits

Résumé

Dans cette article, nous étudions l'influence de l'ouverture d'un marché de droits, du type permis d'émissions , sur l'équilibre général d'une économie. Supposant que l'économie se trouvait à l'équilibre avant l'ouverture du marché, nous décrivons les évolutions dans les choix des entreprises qui garantissent l'existence d'un équilibre dans l'économie élargie. Ce dernier résultat peut être conçu comme assurant que l'économie peut s'adapter à la présence d'un marché de droits sans modification drastique de son organisation.

Changes in the firms behavior after the opening of an allowance market[35]

Antoine Mandel[36]

Centre d'Economie de la Sorbonne, UMR 8174, CNRS-Université Paris 1.

Abstract

This paper focuses on the influence of the opening of a market of allowances, such as the European Union Emission Trading Scheme, on the general equilibrium of an economy. Assuming there existed an equilibrium before the opening of this new market, we describe the changes in the firms behavior which guarantee that an equilibrium can be reached in the enlarged economy. Hence we describe under which conditions the economy can undergo the opening of a market of allowances.

Key Words : General Equilibrium Theory, Existence of Equilibrium, Externalities, Increasing Returns, Markets of allowances.

[35]This paper is a substantial improvement of previous work in collaboration with Alexandrine Jamin (see (17)).

[36]The author is grateful to Professor Jean-Marc Bonnisseau for his guidance and many useful comments. All remaining errors are mine.

1 Introduction

This paper proposes a general equilibrium analysis of an economy undergoing the opening of a market of allowances. The motivation for such a study comes from the promotion of greenhouse gases emissions trading as a key instrument to reach the objectives of the Kyoto Protocol. A general equilibrium approach on the issue seems necessary because the amounts of trades on emission allowance markets may be large enough to influence the whole economy and because emission trading can difficultly be considered separately from the energy markets. Also, markets of allowances maintain close relationships with economic theory as their origin can be found in the Coase Theorem.

The previous general equilibrium literature (see Laffont (20), Boyd and al. (7), Conley and al. (11)) has focused on the existence of equilibrium with markets of allowances, taking the presence of such markets as a fact. We put the emphasis on the effects of the *creation* of an allowance market. The opening of new markets is a topic at the frontier of general equilibrium theory. Apart some recent contributions in the theory of incomplete markets (see Cass and al. (8) and Elul (14)), general equilibrium models usually consider the set of markets is fixed. This is emphasized by the assumption of market completeness or in the Schumpeterian analysis of economic evolution,(22), in which the opening of new markets is one of the dynamic phenomenon occurring in between, almost in opposition with, a sequence of general equilibria.

However, it seems to us that the actual *creation* of markets of greenhouse emissions allowances, such as the European Union Emission Trading Scheme (EUETS), raises inevitably the question of the consequences of the opening of a new market on the existence of a general equilibrium. Taking into consideration the dynamical perspective imposed by the notion of *creation* of a market, we formulate our main interrogation as : *"Which additional conditions ensure the existence of an equilibrium in an economy with a market of allowances knowing that there existed an equilibrium in the economy without such a market ?"*

Of course, such a question is relevant only when one can not apply the standard existence results (in our framework Bonnisseau-Cornet (3) and Jouini (18)) to the economy with an allowance market. We argue this is the case. First it is unlikely that a global free-disposal assumption holds, because when it wastes part of its inputs a firm may incidentally pollute. Also, firms may suffer unbounded losses because of the cost of the allowances. Finally and most importantly, as its market is newly opened and as its *"legal essence"* makes it different from the other commodities, it seems disputable to posit directly assumptions on the agents characteristics in the enlarged economy which would neglect those differences.

Our analysis is conducted in a framework where the producers behavior is represented by general pricing rules. This allows us to encompass increasing returns to scale as well as competitive behavior. It seems important to encompass both cases as many of the firms subject to the greenhouse gases emissions reduction schemes are in the energy sector where the presence of increasing returns is commonly recognized and also because marginal pollution may well be decreasing. On another hand, pricing rules provide a convenient tool to represent changes in the firms behavior, after a slight change of perspective on their interpretation. They are not seen as the local counterpart of a general principle such as profit maximization or marginal pricing but rather as a set of constraints on the acceptable prices determining locally the firms behavior. Concerning the consumption side of the economy, the main particularity of our model is that agents may face a negative external effect because of the firms pollution. They can purchase allowances as a public good in order to prevent it.

Our approach to prove the existence of an equilibrium is to posit separately assumptions on the initial functioning of the economy and on the changes in the firms behavior following the opening of the allowance market. First, we use standard sufficient assumptions (see (3) and (18)) to ensure the existence of an equilibrium in the initial economy. Second we give conditions on the changes in the firms behavior which ensure that a gradual increase in the allowance price leads to a general equilibrium for arbitrary initial endowments in allowances. Accordingly, our results link the range of initial endowments in allowances for which there exists an equilibrium with the flexibility and the sensitivity of the pricing rules with regards to the price of the allowance. Meanwhile we provide a contribution to the theory of general equilibrium with increasing returns as we indeed prove existence of equilibrium without some of the standard assumptions such as free-disposability, bounded losses or positive values of the pricing rules (see Jouini (19) and Giraud (16)).

2 The Model

2.1 Initial economy

We consider an initial economy[37] with a finite number L of commodities labeled by $\ell = 1, \dots, L$, n firms indexed by $j = 1, \dots, n$ and m consumers indexed by $i = 1, \dots, m$. This economy is lying within an environment whose state is denoted by a real parameter $\tau \in \mathbb{R}_-$. The state of the environment (for example the atmospheric concentration of greenhouse gases) is altered by the production process and influences the consumers welfare. We focus on a situation where a market of allowances for environmental damages emerges whereas firms were used to pollute freely. Our aim is to study how the firms should then actualize their behavior in order to let a new general equilibrium come out. We formalize the situation as follows :

The production possibilities of firms in terms of 1 to L commodities are described by sets Y_j such that :

Assumption (Initial Production (IP)) *For all j,*

1. *Y_j is closed;*
2. $0 \in Y_j$;
3. $Y_j - \mathbb{R}^L_+ \subset Y_j$;
4. *If , $(y_j) \in \prod_{j=1}^n \mathcal{A}Y_j$ and $\sum_{j=1}^n y_j \geq 0$ then for all j, $y_j = 0$.*

Those assumptions are standard and ensure that, inaction is possible for every firm, firms can freely-dispose of commodities[38] , free-production is impossible asymptotically.

As they produce, firms influence the environment. We measure according to the function $f_j : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}_-$ the minimal damage caused to the environment by firm j

[37] Notations : in the latter, R^L_{++} denotes the positive orthant of R^L, R^L_+ its closure, S the simplex of $\mathbb{R}^L$, S_{++} its relative interior and $\mathcal{H}$ the affine space it spans. Also e denotes the vector $(\frac{1}{L}, \dots, \frac{1}{L})$ of $\mathbb{R}^L$. $\mathcal{A}X$ denotes the asymptotic cone to the set X.

[38] Under this assumption, according to Lemma5 in Bonnisseau-Cornet (3), ∂Y_j can be endowed with a manifold structure by homeomorphism with $e^\perp$ as the restriction of $\text{proj}_{e^\perp}$ to ∂Y_j is an homeomorphism. In the latter we will consider that this identification holds.

(we speak of minimal damage because firms may be inefficient and pollute more than what they actually need to). The actual state of the environment when the firms choose a production scheme $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j$ is at least as bad as $\sum_{j=1}^n f_j(y_j)$ (the state of the environment is getting worse as this parameter decreases). We assume that the pollution function satisfies the following requirements :

Assumption (Pollution Function (PF)) *For all j, $f_j : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}_-$ is differentiable, has values in $\mathbb{R}_-$ and satisfies $f_j(0) = 0$*

In the initial economy, the environment has no economic value so that the commodities prices are the only relevant variable for the firms. We let each firm determine its choices of production according to a pricing rule $\phi_j : \partial Y_j \to R_+^L$. That is the price $p \in \mathbb{R}_+^L$ of the commodities 1 to L, is acceptable for firm j given a production plan $y_j \in Y_j$ if $p \in \phi_j(y_j)$. Such a behavior coincide with profit maximization when the Y_j are convex and ϕ_j is the normal cone to Y_j. We assume

Assumption (Initial Pricing Rules (IPR)) *For all j,*

1. *ϕ_j has a closed graph.*
2. *For all $y_j \in \partial Y_j$, $\phi_j(y_j)$ is a non-empty closed convex cone of $\mathbb{R}_+^L$ different of $\{0\}$.*

Concerning the consumers, they gain utility from the consumption of non-negative quantities of commodities 1 to L and also are sensitive to the state of the environment. Their preferences are represented by an utility function u_i defined on $\mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}$ which associates to a bundle, $x \in \mathbb{R}_+^L$, of commodities and to an environmental parameter $\tau \in \mathbb{R}$, an utility level $u_i(x, \tau)$. Their wealth comes from an initial endowment in commodities, $\omega_i \in \mathbb{R}_{++}^L$ and from an amount $r_i(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ of the firms profits and losses $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$. The private property case where each agent i holds a share $\theta_{i,j}$ in firm j profits is encompassed in this setting and will serve as a benchmark. Those characteristics are assumed to satisfy the following assumptions :

Assumption (C) *For all i,*

1. *u_i is quasi-concave and C^1 on $\mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}$;*

2. u_i *is monotonic ;*
3. $\forall \tau \in \mathbb{R}_- \ \forall x \in \mathbb{R}^L_+ \ \forall v \in \mathbb{R}^L_+ \setminus \{0\} \ \exists k \geq 0$ *such that* $u_i(x + kv, \tau) > u_i(x, 0)$;
4. $\omega_i \in \mathbb{R}^L_{++}$;
5. $r_i : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ *is continuous and* $\sum_{i=1}^m r_i(\pi_1, \ldots, \pi_n) = \sum_{j=1}^n \pi_j$.

All those assumptions are standard but $C(3)$ which guarantees that a large enough increase in the consumption of any commodity can always compensate the deterioration of the environment. The consumers behavior is then determined by the prices $p \in \mathbb{R}^L_+$ of the commodities 1 to L as they maximize the utility they gain from consumption of those commodities, under their budget constraint and taking the state of the environment as given.

We can then define an equilibrium of the initial economy as :

Definition 1 *An equilibrium of the initial economy is a collection* $(\overline{p}, (\overline{x}_i), (\overline{y}_j, \overline{t}_j))$ *in* $S_{++} \times (\mathbb{R}^L_+)^m \times \prod_{j=1}^n (Y_j \times \mathbb{R}_-)$ *satisfying*

1. *for every* i, $\overline{x}_i$ *maximizes* $u_i(\cdot, \sum_{j=1}^n \overline{t}_j)$ *in the budget set* $B_i(\overline{p}, (\overline{y}_j)) := \{x_i \in \mathbb{R}^\ell_+ \mid \overline{p} \cdot x_i \leq \overline{p} \cdot w_i + r_i(\overline{p} \cdot \overline{y}_j)\}$ *;*
2. *for every* j, $\overline{y}_j \in \partial Y_j$, $\overline{t}_j \leq f_j(\overline{y}_j)$ *and* $\overline{p} \in \phi_j(\overline{y}_j)$.
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \sum_{i=1}^m w_i$.

In order to ensure that there exists such an equilibrium we posit standard sufficient assumptions for existence of equilibrium with general pricing rules (see (4), (18)). On the one hand,we shall assume that the producers follow the marginal pricing rule or some pricing rule with bounded losses.

Assumption (Initial Standard Pricing Rules (ISPR)) *One of the following holds :*

1. *For all* j, ϕ_j *has bounded losses : there exist* $m_j \in \mathbb{R}$ *such that if* $(p, y_j) \in S \times \partial Y_j$ *and* $p \in \phi_j(y_j)$, *one has* $p \cdot y_j \geq m_j$.
2. *For all* j, ϕ_j *is the marginal pricing rule given by Clarke's Normal cone to* Y_j, *that is* $\phi_j(y_j) = N_{Y_j}(y_j)$ *(see (10)).*

On the other hand, a survival assumption must ensure that the economy produces enough wealth in a sufficiently large range of situations.

Assumption (Initial Survival (IS)) *For all* $\omega' \geq \omega$, *for all* $(p, (y_j)) \in S \times \prod_{j=1}^n Y_j$ *such that* $p \in \cap_j \phi_j(y_j)$ *and* $\sum_{j=1}^n y_j + \omega' \geq 0$ *one has* $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \omega') > 0$.

Finally, in order to ensure each consumer receives a positive wealth, we posit :

Assumption (Initial Revenue (IR)) *For all* $(p, (y_j)) \in S \times \prod_{j=1}^n Y_j$ *such that* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i \geq 0$ *and* $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i) > 0$, *one has for all* i, $p \cdot \omega_i + r_i(p \cdot y_j) > 0$.

Those assumptions guarantee the existence of an equilibrium in the initial economy in the sense of :

Theorem 1 *Under Assumptions (IP), (PF), (C), (IPR), (ISPR), (IS) and (IR), there exist an equilibrium in the initial economy.*

Proof: *Cf Appendix. This is a consequence of the index formula we proved in (21), but could also be obtained as a corollary of Bonnisseau (5) and Bonnisseau-Médecin (6).*

One can note that if the agents wealths are set according to a private property revenue scheme, the preceding assumptions clearly hold when the producers are competitive (i.e profit maximizers with convex production sets). More generally, they hold when the pricing rules are loss-free, i.e for all $(p, y_j) \in S \times \partial Y_j$ such that $p \in \phi_j(y_j)$, one has $p \cdot y_j \geq 0$. This encompasses the case of marginal pricing rule when the production sets are star shaped with respect to 0. Those particular cases are further discussed in the example section.

3 Economies with an allowance market

Let us now consider that in order to limit the environmental damages due to production, the government forces by legal means the firms to use as input in their production process a quantity of allowances corresponding to their actual influence on the environment. Namely, when firm j deteriorates the environment of

t_j, it must use as input a quantity t_j of allowances. Meanwhile the government supplies allowances to the economy by initially allocating a quantity A to consumers and producers according to the vector $a = (a_1, \cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+n}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ with $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j = A$. The government hence limits the deterioration of the state of the environment to the level $-A$. Now, this initial allocation may not be efficient and agents may gain to trade allowances. Hence an allowance market emerges and the agents should consequently modify their behavior.

3.1 Technical changes in the production sector

First, the relevant production set for firm j now is :

$$Z_j := \{(y_j, t_j) \in Y_j \times \mathbb{R}_- \mid t_j \leq f_j(y_j)\}$$

Note that under Assumptions (IP) and (PF), Z_j is closed, contains 0 and satisfies asymptotically a no free-production condition. However, given our assumption on the pollution function, Z_j does not necessarily satisfy a general free-disposability assumption of the type $Z_j - \mathbb{R}_+^{L+1} \subset Z_j$. Indeed firms may have to increase their use of allowance in order to dispose of their other inputs : for example when a firm burns its waste inputs it produces CO_2 emissions as a by-product.

On another hand firms face an additional cost whose magnitude depend on the allowance price q. Given a price $(p, q) \in \mathbb{R}^{L+1}$ and a production plan $(y_j, t_j) \in Z_j$ the profit of firm j is $p \cdot y_j + q(a_j + t_j)$. They should consequently modify their pricing behavior. We shall denote by $\psi_j : \partial Z_j \to \mathbb{R}^{L+1}$ the pricing rule adopted by firm j in the enlarged economy. Hence, the price vector $(p, q) \in R^{L+1}$ is acceptable for firm j given the production plan $(y_j, t_j) \in \partial Z_j$ if and only if $(p, q) \in \psi_j(y_j, t_j)$.

3.2 Changes in consumers behavior

The changes which affect consumers characteristics are the modification of their consumption set[39] which now is $\mathbb{R}_+^{L+1}$ and the modification of their revenue induced by the initial allocation of allowances and the changes in the firms profits.

[39] One should pay attention to the fact that even this enlarged consumption set is not the definition set of the utility function. Indeed the utility depends on the consumption of commodities $x_i \in \mathbb{R}_+^L$ and of the state of the environment which is a real parameter summarizing the external effects the consumer faces.

Given a production scheme $(y_j, t_j) \in \prod_{j=1}^n Z_j$ and a price $(p, q) \in \mathbb{R}^{L+1}$, the wealth distributed to consumer i now is $(p, q) \cdot (\omega_i, a_i) + r_i((p, q) \cdot (y_j, t_j + a_j))$.

3.2.1 Private use of the allowance

Now the changes concerning properly the consumers' behavior depend on their access to the allowance market. If they do not have access to the market as buyers, they behave as in the initial economy : given an environment τ, they maximize the utility $u_i(x_i, \tau)$ they gain from consumption of bundles $x_i \in \mathbb{R}_+^L$ of commodities, under the budget constraint $p \cdot x_i \leq (p, q) \cdot (\omega_i, a_i) + r_i((p, q) \cdot (y_j, t_j + a_j))$. In this case, the allowance is only used by firms and as a private good. Hence we can define an equilibrium with private use of allowance (denoted for short private equilibrium) as :

Definition 2 *A private equilibrium of the enlarged economy is a collection* $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}_i), (\overline{y}_j, \overline{t}_j))$ *in* $(S^L \times \mathbb{R}_+) \times (\mathbb{R}^L)^m \times \prod_{j=1}^n \partial Z_j$ *satisfying :*

1. *for every* i, $\overline{x}_i$ *maximizes* $u_i(\cdot, \sum_{j=1}^n \overline{t}_j)$ *in the budget set* $B_i(\overline{p}, (\overline{y}_j)) := \{x_i \in \mathbb{R}_+^\ell \mid \overline{p} \cdot x_i \leq (\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\omega_i, a_i) + r_i((\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\overline{y}_j, \overline{t}_j + a_j))\}$;
2. *for every* j, $(\overline{p}, \overline{q}) \in \psi_j(\overline{y}_j, \overline{t}_j)$;
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \sum_{i=1}^m w_i$;
4. $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n \overline{t}_j = 0$.

One can remark that in this framework the equilibrium state of the environment is exogenously fixed by the government through the initial allocation of allowances at $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j$. This choice of initial allocation also have effects on the repartition of wealth as the freely allocated allowances finally acquire a value. On another hand one should note that private use of allowances is the situation which prevails in some markets of allowances such as the European Union Emission Trading Scheme.

3.3 Public use of the allowance

When the consumers access to the allowance market is unrestricted, they may purchase it in order to prevent its use by the producers and hence improve the state of the environment. Their purchases benefit the other consumers so that the allowance turns out to be a public good. Namely, the utility of a consumption bundle $(x_i, s_i) \in \mathbb{R}_+^{L+1}$ for agent i given the quantity of allowances $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j$ initially endowed to the economy and the quantities $(s_k)_{k\neq i}$ purchased by the other consumers is $u_i(x_i, -(\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{i=1}^m a_i) + (\sum_{k\neq i} s_k + s_i))$. Given an environment $-(\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{i=1}^m a_i) + \sum_{k\neq i} s_k$, consumer i is set to maximize the utility of its consumption bundle $(x_i, s_i) \in \mathbb{R}_+^{L+1}$, under the budget constraint $p\cdot x_i + q\cdot s_i \leq (p,q)\cdot(\omega_i, a_i) + r_i((p,q)\cdot(y_j, t_j + a_j))$. We then define an equilibrium with public use of the allowance (denoted for short public equilibrium) as :

Definition 3 *A public equilibrium of the enlarged economy is a collection* $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, \overline{t}_j))$ *in* $(S^L \times \mathbb{R}_+) \times (\mathbb{R}_+^{L+1})^m \times \prod_{j=1}^n \partial Z_j$ *satisfying :*

1. *for every* i, $(\overline{x}_i, \overline{s}_i)$ *maximizes* $u_i(x_i, -(\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{i=1}^m a_i) + (\sum_{k\neq i} s_k + s_i))$ *in the budget set* $B_i(\overline{p}, (\overline{y}_j)) := \{(x_i, s_i) \in \mathbb{R}_+^{L+1} \mid (\overline{p}, \overline{q})\cdot(x_i, s_i) \leq (\overline{p}, \overline{q})\cdot(\omega_i, a_i) + r_i((\overline{p}, \overline{q})\cdot(\overline{y}_j, \overline{t}_j + a_j))\}$ *;*
2. *for every* j, $(\overline{p}, \overline{q}) \in \psi_j(\overline{y}_j, \overline{t}_j)$ *;*
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \sum_{i=1}^m w_i$ *;*
4. $\sum_{i=1}^m \overline{s}_i = \sum_{j=1}^n \overline{t}_j + \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j$.

At such an equilibrium, the state of the environment is endogenously determined and depends of each consumer purchase of allowance as a public good. The initial allocation of allowances also influence the repartition of wealth.

4 Changes in the firms behavior and existence of equilibrium.

The existence of an equilibrium in the enlarged economy relies heavily on the modification of the firms behavior following the opening of the allowance market. Indeed, the producers may consider they can only handle small variation of the quantity of pollution they cause so that an equilibrium will fail to exist if the initial allocation of allowances is too low. Also, firms may undergo important losses because of the cost of the allowance input. This may lead the revenue of certain consumers below 0 and hence prevent the existence of an equilibrium.

Our aim in the following is to give conditions on the firms behavior (i.e on the pricing rules) which are sufficient to ensure existence of equilibrium in the enlarged economies, knowing that sufficient conditions for the existence of an equilibrium were satisfied in the initial economy.

4.1 Stability of the initial equilibrium

First, in order to remain in a workable framework we shall assume that the newly set pricing rule satisfy the regularity and homogeneity properties commonly used in the literature :

Assumption (PR)

For all j, ψ_j has a closed graph and convex values values in $\mathbb{R}^{L+1}$.

Note that we do not assume the enlarged pricing rules have positive values. Indeed, the lack of free-disposability makes it doubtful that such a condition always holds. In particular, it is not necessarily satisfied in the case of marginal pricing (see the Example Section).

A second natural requirement concerns the compatibility of the firms behavior with the one it had in the initial economy. Indeed when the allowance price is null it is from the firms point of view as if it was available in arbitrary high quantity, so that they can behave as in the initial economy. Hence we state :

Assumption (Compatibility)

$\forall y_j \in \partial Y_j$, *one has* $\{p \in \mathbb{R}^L \mid (p, 0) \in \psi_j(y_j, f_j(y_j))\} = \phi_j(y_j)$

This implies the equilibria of the initial economy coincide with the private equilibria of the enlarged economy with zero allowance price :

Lemma 1 *Assume that for all j, ψ_j satisfies (Compatibility). Then $(\overline{p}, (\overline{x}_i), (\overline{y}_j, \overline{t}_j))$ is an equilibrium of the initial economy if and only if there exist an allowance allocation $((a_i), (a_j)) \in (\mathbb{R}^L)_+^{m+n}$ such that $\sum_{j=1}^n a_j + \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n \overline{t}_j \geq 0$ and $(\overline{p}, 0, (\overline{x}_i), (\overline{y}_j, \overline{t}_j))$ is a private equilibrium of the enlarged economy.*

As a corollary, under (Compatibility) there can exist equilibria with improved state of the environment (compared to the initial situation) only if firms are ready to accept positive prices for the allowance and to modify consequently their behavior. In this respect let us define :

Definition 4 *An allowance price q is called acceptable for firm j at y_j if there exist $p \in S_{++}$ such that $(p, q) \in \psi_j(y_j, f_j(y_j))$. We shall denote by $Q_j(y_j) = \{q \in \mathbb{R}_+ \mid \exists p \in S_{++}$ s.t $(p, q) \in \psi_j(y_j, f_j(y_j))\}$ the set of allowance prices acceptable for firm j at y_j.*

In order to introduce some flexibility in the firms reaction to a change in the allowance price, we assume :

Assumption (Flexibility) *For all j, for all $y_j \in \partial Y_j$, the set $Q_j(y_j)$ is open in $\mathbb{R}_+$.*

Although it may not seem very demanding this assumption implies (cf. Appendix) that the firms are ready to readjust in function of the allowance price, the prices they accept for the 1 to L commodities until one of those is zero. It holds in particular in the case of marginal pricing (cf the Example Section) or whenever the behavior of the firm is determined by some function depending on the profit (e.g zero profit pricing rule).

This flexibility requirement ensures existence of equilibrium is locally stable to the perturbation induced by the opening of the allowance market in the sense of :

Theorem 2 *Under Assumptions (IP), (PF), (C), (IPR), (IS), (ISPR), (IR), (PR), (Compatibility) and (Flexibility), there exists a neighborhood of zero in $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{O}$, such that for every allowance price $q \in \mathcal{O}$, there exist an initial endowment in allowance $((a_i), (a_j)) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ such that the enlarged economy has a private equilibrium with allowance price equal to q.*

Proof: *Cf Appendix.*[40]

[40] In fact, the flexibility assumption may here be weaken to : if $0 \in Q_j(y_j)$ then $Q_j(y_j)$ is a neighborhood of 0.

The fact that the allowance price turns positive does not necessarily imply that the state of the environment is improved. Indeed the initial allocation $((a_i),(a_j))$ given by the preceding Theorem may be constant for every $q \in \mathcal{O}$. In order to ensure the economy may undergo positive reductions of its use of allowances, one must impose further conditions on the influence of the allowance price on the firms behavior.

4.2 On the survival assumption in the enlarged economy

A prerequisite therefore is to ensure that the economic activity remains viable even though the allowance price increases significatively. The new costs induced by the use of allowance as input may lead the firms to use less productive technology for the production of commodities. In turn, this may modify the value of the outcome of the economic process. The economic activity as a whole remains viable only if this value remains above zero. Mathematically, this comes to :

Assumption (SA) *For all* $((p,q),(y_j)) \in (S\times\mathbb{R}_+)\times\prod_{j=1}^n \partial Y_j$ *such that* $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0$ *and* $(p,q) \in \cap_j \psi_j(y_j, f_j(y_j))$ *one has* $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \omega) > 0$.

This is a weak form of survival assumption as, contrary to Assumption (IS) and to the usual survival assumptions of the literature (see (3) (4)), it bears only on the set of attainable allocations. Hence it states that firms do not actually choose production plans such that the aggregate wealth is zero, whereas the usual survival assumptions (which bear on a larger set than this of attainable allocations) posit that the firms do not choose production plans which would, for even greater resources, lead to a null aggregate wealth. Also note that (SA) concerns only the value of the production in terms of 1 to L commodities. The allowance does not enter into consideration here, as at equilibrium no wealth is created or lost because of the operation of the allowance market. The working of this market only causes lump-sum wealth transfers.

Assumption SA suffices to guarantee that whatever the allowance price may be, the economic process is beneficial and hence a private equilibrium may be reached :

Theorem 3 *Under Assumptions (IP), (C),(PF), (IPR), (IS), (ISPR), (IR), (PR), (Compatibility), (Flexibility) and (SA), for every non-negative allowance* *price q, there exist an initial endowment in allowance* $((a_i),(a_j)) \in \mathbb{R}^{m+n}$ *such that the enlarged economy admits a private equilibrium with allowance price equal to q.*

Proof: *Cf Appendix.*

Remark 1 *Theorem* 3 *can be seen as a result of existence of equilibrium with fixed price of the allowance. Existence of fixed price equilibria are usually obtained (see Drèze (13)) by fixing constraints on supply or demand in the economy. Here the constraints bear on the initial endowments in allowance.*

Let us underline a few cases where the Assumption (SA) is satisfied.

First, because of the interiority of the initial endowments in commodities, it is clear that Assumption (SA) holds provided the enlarged pricing rules do not allow for losses on the commodities markets.

Proposition 1 *Assumption (SA) holds if the enlarged pricing rules are (Enlarged Loss free) in the sense of :"For all* $((y_j),p,q)$ *such that* $(p,q) \in \cap_j \psi_j(y_j, f_j(y_j))$ *and* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m w_i \geq 0$ *one has* $p \cdot y_j \geq 0$*."*

This (Enlarged Loss Free) condition holds in particular if the initial pricing rules were loss free and if the firms, which face a new cost on the allowance market, do not simultaneously accept a diminution of their profits on the commodities markets :

Assumption (Increasing Tarification) *For all* $((y_j),p,q)$ *such that* $(p,q) \in \cap_j \psi_j(y_j, f_j(y_j))$ *and* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m w_i \geq 0$ *, for all j there exist* $p_0^j \in \phi_j(y_j)$ *such that* $\frac{p}{\|p\|_1} \cdot y_j \geq \frac{p_0^j}{\|p_0^j\|_1} \cdot y_j$.

Proposition 2 *If the initial pricing rules are loss free and (Increasing Tarification) holds, then SA holds.*

Proof: *As mentioned above, (Enlarged Loss Free) clearly holds in this framework. It then suffice to apply Proposition 1.*

One can also guarantee assumption (SA) holds if there always exists an output whose price is positive. Therefore one must first assume that at least one output is produced :

Assumption (Output Production) *For all* $((y_j), p, q)$ *such that* $(p, q) \in \cap_j \psi_j(y_j, f_j(y_j))$ *and* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m w_i \geq 0$ *, one has* $\sum_{j=1}^n y_j \notin \mathbb{R}_-^L$.

The outputs must also be valued at a positive price. In our framework, this second assumption may be justified if the allowance is a necessary input for the operation of each production technique. Indeed one can then assume a general raise of the output prices to compensate the cost of allowance.

Assumption (Output prices Raise) *For all* $((y_j), p, q)$ *such that* $(p, q) \in \cap_j \psi_j(y_j, f_j(y_j))$, $q > 0$ *and* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m w_i \geq 0$,*one has :*
if $(\sum_{j=1}^n y_j)_h > 0$ *there exist* j *and* $p_0 \in \phi_j(y_j)$ *such that* $\frac{p_h}{\|p\|_1} > \frac{(p_0)_h}{\|p_0\|_1}$.

One then has :

Proposition 3 *Under (Output Production) and (Output prices Raise), Assumption (SA) is satisfied.*

Proof: *Output Production guarantee there is at least an output produced. (Output prices Raise) guarantee it is valued at a positive price.*

More generally, one has :

Proposition 4 *If the pricing rules* ψ_j *assign positive values to commodities prices and if the economy never wastes its entire resources (i.e for all* $((y_j), p, q)$ *such that* $(p, q) \in \cap_j \psi_j(y_j, f_j(y_j))$ *and* $\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m w_i \geq 0$ *one has* $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \neq 0$*), then Assumption (SA) holds.*

Proof: *Under those assumptions, the positive resources available at a production equilibrium will necessarily be valued at a positive price.*

4.3 On the revenue assumption in the enlarged economy

Even-though they do not influence the aggregate wealth, transfers occurring on the allowance market matter because of their influence on the consumers revenue. Indeed, in order to ensure the existence of an equilibrium, one must guarantee that each consumer receive a positive part of the aggregate wealth. This condition may fail to hold when the losses on the allowance market are not well distributed. In order to prevent this failure, one can extend the initial revenue assumption to :

Assumption (Revenue (R)) *For all* $((p,q),(y_j)) \in (S \times \mathbb{R}_+) \times \prod_{j=1}^n Y_j$ *such that* $(p,q) \in \cap_j \psi_j(y_j, f_j(y_j))$*, and* $(p,q)\cdot(\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i, \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n f_j(y_j)) > 0$*, one has for all* i $(p,q)\cdot(\omega_i, a_i) + r_i((p,q)\cdot(y_j, a_j + f_j(y_j)) > 0$.

This leads to consider that there exist an appropriate mechanism of wealth transfers which allocates the firms' losses among consumers.

Note that the initial revenue assumption guaranteed the existence of such a mechanism for the standard commodities markets only, what is not sufficient to ensure each agent receives a positive wealth for arbitrary allocation of allowances. Indeed consider a firm which makes a zero profit on the 1 to L commodities market and uses large quantities of allowances, it is going to support heavy losses when the allowance's price raises. An agent who owns a large share of this firm may see its revenue turn negative.

Nevertheless if the government targets precisely the needs of each firm in allowance so that there is no trade of allowances at equilibrium (that is one has for all j, $a_j = -f_j(y_j)$), then there are no losses on the allowance market and the initial revenue assumption is sufficient to ensure each consumer receives a positive wealth. Even tough it can be related to the principle of grandfathering, it is very demanding to consider the government is able to choose the initial allocations with such accuracy and foresight.

Remark 2 *If one wants to dispense with the enlarged revenue assumption, one can consider in the following that the government targets precisely the needs of each firm in allowance (that is one has for all* j*,* $a_j = -f_j(y_j)$*). Our existence results (Theorems 4 and 5) then remain valid if one reads "for every aggregate level of allowance" (allocated so that there are no losses on the allowance market) instead of "for every initial allocation of allowance."*

4.4 Existence of Private Equilibrium for arbitrary allowance allocation

Finally, in order to obtain equilibria for arbitrary allowance allocations, the firms behavior must be amenable enough to the allowance price. Hence we state,

Assumption (Amenability) *For all* $\epsilon > 0$ *there exist* $K \geq 0$ *such that for all* $(p, q, (y_j)) \in (S \times \mathbb{R}_+) \times \prod_{j=1}^n Y_j$ *satisfying* $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0$, $(p, q) \in \cap_j \psi_j(y_j, f_j(y_j))$, $p \in S_{++}$, $q \geq K$,

$$\textit{one has for all } j,\ f_j(y_j) \geq -\epsilon.$$

This says that when the allowance price is large enough compared to the commodities price, the only production plans acceptable for the firms are those which generate an a priori fixed low level of pollution and hence necessitate the correspondingly low use of allowances as input. It entitles us to state our main results concerning the existence of equilibrium for arbitrary initial allocations in allowances.

Theorem 4 *Under Assumptions (IP), (PF), (C) , (IPR), (IS), (ISPR), (IR), (PR), (Compatibility), (Flexibility), (SA),(R) and (Amenability), for every initial allocation of allowance* $((a_i), (a_j)) \in \mathbb{R}_+^{m+n} \setminus \{0\}$, *the enlarged economy has an equilibrium with private use of allowance.*

Proof: *cf. Appendix*

4.5 Existence of Public equilibrium for arbitrary allowance allocation

We now turn to the existence of equilibrium with public use of the allowance. In this framework the demand in allowance of the consumers tends to push up the price as soon as the market opens. Hence the analogous of Theorems 2 and 3 do not hold. However, one has :

Theorem 5 *Under Assumptions (IP), (PF), (C) (IPR), (IS), (ISPR), (IR), (Compatibility), (Flexibility),(SA),(R) and (Amenability), for every initial allocation of allowance* $((a_i),(a_j)) \in \mathbb{R}_+^{m+n} \setminus \{0\}$, *the enlarged economy has an equilibrium with public use of allowance.*

Proof: *Cf Appendix.*

5 Examples

We shall now discuss to which extent the results stated in the preceding sections apply to commonly used pricing rules.

5.1 Business as usual

In order to set a benchmark, let us first consider the *Business as usual* situation where firms do not modify their behavior following the opening of the allowance market and where consumers do not have access to the market. That is firms keep following their initial pricing rule on the 1 to L commodities market and then purchase the quantity of allowance they need whatever its price may be, while consumers are only affected by wealth transfers. In this framework all the previous assumptions but (Amenability) hold so that there exist equilibria for every allowance price. However these equilibria in fact coincide with those one can obtain in the initial economy after a revenue redistribution and hence require a corresponding supply of allowances. In particular the state of the environment is not improved.

5.2 Global Loss Free

Let us now focus on the case where pricing rules are globally loss-free in the sense of :

Assumption (Global Loss Free) *For all* j, *for all* $y_j \in \partial Y_j$, *for all* $(p,q) \in \psi_j(y_j, f_j(y_j))$, $p \cdot y_j + qf_j(y_j) \geq 0$, then Assumption (SA) holds. Moreover (Amenability) clearly holds because the use of a fixed positive quantity of allowance for arbitrary high allowance price would entail losses. Hence one obtains using Theorems 4 and 5 :

Corollary 1 *Under Assumptions (IP), (PF),(C),(IPR), (IS), (ISPR), (IR), (PR), (Compatibility), (Flexibility), (Global Loss Free) and (R), for every initial allocation of allowance* $((a_i),(a_j)) \in \mathbb{R}_+^{m+n} \setminus \{0\}$, *the enlarged economy has an equilibrium with public (resp. private use) of allowance.*

Note that this encompasses in particular the case of competitive behavior when the Y_j are convex sets containing zero and the pollution functions are concave. That is to say when the marginal returns are decreasing and the marginal pollution is increasing.

5.3 Marginal Pricing and Competitive Behavior

Let us now deal with the case of marginal pricing behavior. That is we consider the firms follow the marginal pricing rule given by Clarke's Normal cone (see (10)) in the initial and in the enlarged economy. This also encompasses the case of competitive behavior when the production sets are convex.

We restrict attention to the case where the marginal pricing rule is loss-free in the initial economy, that is we shall posit

Assumption (Star-Shaped) *For all* j, Y_j *is* 0*-star-shaped.*

We shall also assume that the pollution increases with the scale of production :

Assumption (Increasing Pollution) *For all* $(y_j) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j$ *such that* $\sum_{j=1}^{n} y_j + \omega \geq 0$ *(and* $f_j(y_j) < 0$*) the application* $\mu \to f_j(\mu y_j)$ *is (strictly) decreasing.*

Finally, we assume that there exist an input whose use does not decrease the marginal pollution (what is fairly natural as the use of additional inputs is likely to increase pollution). In differentiable terms, the assumption is :

Assumption (Input Increase) *For all j, for all $y_j \in Y_j$, one has $\nabla f_j(y_j) \notin \mathbb{R}^L_{--}$*

This suffices to guarantee the existence of a marginal pricing equilibrium.

Corollary 2 *Under Assumptions (IP),(PF), (C), (Interiority), (Star-Shaped), (Increasing Pollution), (Input Increase) and (R), if each firm follows the marginal pricing rule then for every initial allocation of allowance $((a_i),(a_j)) \in \mathbb{R}^{m+n}_+ \setminus \{0\}$, the enlarged economy has a public (resp a private) equilibrium.*

Proof: *The marginal pricing rule in the initial economy is given by*

$$\phi_j(y_j) = N_{Y_j}(y_j)$$

and satisfies Assumptions (IPR) and (ISPR).

As mentioned above (Star-Shaped) implies the marginal pricing rule is loss-free in the initial economy. Together with the interiority of the initial endowments this ensures the satisfaction of Assumptions (IS) and (IR) and the existence of a marginal pricing equilibrium in the initial economy according to Theorem 1.

Now, in the enlarged economy, the marginal pricing rule is given by (see Clarke (10)) :

$$\psi_j(y_j, f_j(y_j)) = (N_{Y_j}(y_j), 0) - \{\lambda(\nabla f_j(y_j), 1)\}_{\lambda \geq 0}$$

and satisfies Assumption (PR) as well as (Compatibility).

Differentiating (Increasing Pollution), one has for all $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j$ such that $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0$, for all j $\nabla f_j(y_j) \cdot y_j \leq 0$. This implies the (Enlarged loss Free) condition and therefore SA holds.

On another hand (Input Increase) implies that whenever $p \in S_{++}$ and $(p, \lambda) \in \psi_j(y_j)$, there exist $p_0 \neq 0$ in $N_{Y_j}(y_j) \cap \mathbb{R}^L_+$ such that $p = p_0 - \lambda \nabla f_j(y_j)$. Hence for $\epsilon > -\lambda$ small enough there exist $\mu := \frac{1+(\lambda+\epsilon)\nabla f_j(y_j)\cdot e}{p_0 \cdot e} \geq 0$ such that $p^\epsilon = \mu p_0 - (\lambda+\epsilon)\nabla f_j(y_j) \in S_{++}$, so that $(p^\epsilon, \lambda+\epsilon) \in \psi_j(y_j)$ and $\lambda + \epsilon \in Q_j(y_j)$. Therefore, (Flexibility) holds.

Finally, let us focus on the (*Amenability*) *requirement. Let us consider $\epsilon > 0$ and $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j$ such that $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0$ and $f_j(y_j) \leq -\epsilon$. Due to the compacity of the set of attainable production allocation*[41]*, AT, one has :*

[41] See the Appendix, section "Equilibrium Correspondence" for a proper definition.

– $m = \sup\{\nabla f_j(y_j) \cdot y_j \quad | \ (y_j) \in AT, \inf_j f_j(y_j) \leq -\epsilon\} < 0$, *thanks to the differentiation of (Increasing Pollution)*
– *The set* $\sup\{\sum_{j=1}^{n} \|y_j\| \mid (y_j) \in AT\}$ *is bounded above and we denote by M its least upper bound.*

Let $\lambda \geq -\frac{2M}{m}$. Now, assume there exist $p \in S_{++}$ such that $(p, \lambda) \in \psi_j(y_j, f_j(y_j))$. One has $p + \lambda \nabla f_j(y_j) \in N_{Y_j}(y_j)$, but $(p + \lambda \nabla f_j(y_j)) \cdot y_j \leq M + \lambda m < 0$ which contradicts the fact that the marginal pricing rule on Y_j is loss-free. Hence the (Amenability) Assumption holds.

All the necessary assumptions for Theorems 4 and 5 hold. It suffices to apply those results to end the proof.

Similar results holds for arbitrary pricing rules whenever the (Star-Shaped) Assumption is replaced by the assumption that the initial pricing rules ϕ_j are loss free and when the pricing rules of the enlarged economy are obtained by adding the marginal cost of the allowance used as input in the production process to the initial pricing rules. Namely, one has :

Corollary 3 *Assume Assumptions (IP),(C), (PF), (IPR), (Increasing Pollution) and (Input Increase) hold. If the initial pricing rules ϕ_j are loss-free and the pricing rules in the enlarged economy are of the form*

$$\psi_j(y_j, f_j(y_j)) = (\phi_j(y_j), 0) - \{\lambda(\nabla f_j(y_j), 1)\}_{\lambda \geq 0},$$

then for every initial allocation of allowance $((a_i), (a_j)) \in \mathbb{R}_+^{m+n} \backslash \{0\}$, the enlarged economy has a public (resp a private) equilibrium.

6 Appendix, proofs

6.1 Foreword

In order to prove existence of an equilibrium in the enlarged economy we can not use the seminal literature on increasing returns (among others (3) and (18)) because of the presence of externalities, the lack of free-disposability in the production process, the value of the enlarged pricing rules outside the positive orthant (e.g in the case of marginal pricing), and also because losses on the allowance market may be unbounded. Nevertheless it is easy to obtain an existence result in the initial economy. Our approach then is to perturb the equilibrium correspondence of the initial economy in a way such that new zeroes correspond to equilibria of the enlarged economies. We then use invariance properties of the degree (see Cellina (9)) in order to show that there actually exist such equilibria.

6.2 Characterization of consumers behavior

Let us first define the consumers demands. We consider the demand of agent i in the enlarged economy when the allowance consumption is restricted at a certain level $H \geq 0$:

Definition 5 *The demand of agent i,* $\Delta_i^H : \mathbb{R}_- \times (S_{++} \times]-1, +\infty[) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{L+1}$, *is the correspondence which associates to a collection* $(\tau, (p, q), w)$ *of environment, prices and wealth the set of elements :*

$$\Delta_i^H(\tau, (p, q), w) = \{(\overline{x}_i, \overline{s}_i) \in \mathbb{R}_+^L \times [0, H] \mid u_i(\overline{x}_i, \tau + \overline{s}_i) = \max_{B_i((p,q),w)} u_i(x_i, \tau + s_i)\}$$

where $B_i((p, q), w) = \{(x_i, s_i) \in \mathbb{R}_+^L \times [0, H] \mid p \cdot x_i + q \cdot s_i \leq w\}$.

The restriction of allowance consumption below H is a technical trick to be able to deal simultaneously with public and private use of allowance. In particular when $H = 0$, Δ_i^0 is the consumer demand in the initial economy and at a private equilibrium. This restriction also makes it licit to define the demand for negative allowance prices. The use of negative allowance price also is a technical trick which ensure that the equilibria with zero allowance price do not lie on the boundary of the domain of the equilibrium correspondence. Under assumption C, Berge's maximum Theorem ensures that Δ_i^H is non-empty valued and upper-semi-continuous (u.s.c). Moreover thanks to Assumption C(3) it satisfies the following boundary condition :

For all τ, *for all* $((p^n, q^n), w^n)$ *converging to* (p, q, w) *such that* $w > 0$ *and* $p \in \partial S$ *one has for all* i, $\lim_n \ \|proj_{\mathbb{R}^L}((\Delta_i^H(\tau, (p^n, q^n), w_n))\| = +\infty$.

The wealth of agent i, given prices $(p, q) \in (S \times] - 1, +\infty[)$, production choices $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j$ and an initial allocation $((a_i), (a_j)) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ of allowances is

$$w_i((p, q), (y_j), (a_i), (a_j)) = (p, q) \cdot (\omega_i, a_i) + r_i((p, q) \cdot (y_j, f_j(y_j) + a_j)).$$

As this wealth may fail to be positive at some point we introduce following Lemma 2 in Jouini (18) auxiliary income functions, in order to be able to define the equilibrium correspondence on a sufficiently large set.

Lemma 2 *Let* $V = \{((p,q),(y_j),(a_i),(a_j)) \in S_{++} \times]-1,+\infty[) \times \prod_{j=1}^{n} \partial Y_j \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \mid (p,q) \cdot (\sum_{j=1}^{n} y_j + \omega, \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} f_j(y_j)) > 0\}$
there exist functions $\tilde{r}_i : V \to \mathbb{R}$ *such that for all* $((p,q),(y_j),(a_i),(a_j)) \in V$,

1. $\sum_{i=1}^{m} \tilde{r}_i((p,q),(y_j),(a_i),(a_j)) = (p,q) \cdot (\sum_{j=1}^{n} (y_j, a_j + f_j(y_j)) + (\omega, \sum_{i=1}^{m} a_i))$;
2. *for all* i, $\tilde{r}_i((p,q),(y_j),(a_i),(a_j)) > 0$;
3. *if for all* i, $w_i((p,q),(y_j),(a_i),(a_j)) > 0$ *then for all* i, $w_i((p,q),(y_j),(a_i),(a_j)) = \tilde{r}_i((p,q),(y_j),(a_i),(a_j))$.

Proof: *It suffices to set following (18), for all* $((p,q),(y_j),(a_i),(a_j)) \in V$:

$$\tilde{r}_i((p,q),(y_j),(a_i),(a_j)) = (1-\theta(w))\frac{\sum_{i=1}^{m} w_i}{m} + \theta(w) w_i$$

where $w = (w_i) = w_i((p,q),(y_j),(a_i),(a_j))$

$$\text{and } \theta(w) = \begin{cases} 1, & if\ \ for\ all\ i \quad w_i > 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i - m\ \inf_i w_i}, & otherwise \end{cases}$$

6.3 Proof of Theorem 1

We can then characterize the equilibria of the initial economy through the correspondence E_0 defined on $\{(p,(x_i),(y_j)) \in S_{++} \times (\mathbb{R}^L)^m \times \prod_{j=1}^{n} \partial Y_j \mid p \cdot (\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} \omega_i) > 0\}$ by $E_0(p,(y_j)) =$

$$\begin{pmatrix} (proj_{e^\perp}(\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i=1}^{m} \omega_i), \\ (x_i, 0) - \Delta_i^0(\sum_{j=1}^{n} f_j(y_j), (p,0), \tilde{r}_i((p,0),(y_j),(0),(0)), \\ (\overline{\phi}_j(y_j) - p)). \end{pmatrix}$$

where for all j and all $y_j \in \partial Y_j$, $\overline{\phi}_j(y_j) := \phi_j(y_j) \cap S$.

It is a direct consequence of 4.3 in (21) and of the results of Jouini (18) that under Assumptions (IP), (PF), (C), (IPR), (IS) and (IR) the zeroes of E_0 coincide with the set of equilibria of the initial economy and that the degree of this correspondence is non-zero. Hence, there exist equilibria in the initial economy. This proves Theorem 1.

6.4 Parametrization by the allowance market

The opening of the allowance market influences the commodities markets in two principal ways. First, the firms modify their pricing behavior in function of the allowance price, second the consumers wealth is modified by the transfers taking place on the allowance market. Those influences might be represented as parameters influencing the equilibrium on the commodities markets. Hence, we study in the following a parametrized equilibrium correspondence. The initial allocation of allowances for which there exist an equilibrium are then determined endogenously as the allocations which clear the allowance market for some values of the parameters.

The parameter influencing the firms pricing rules is the allowance price. However, we would like to define parametrized pricing rules for every non-negative real number (even if this number is not an admissible allowance price for the firm). Therefore we have to use the following trick. We set for $\lambda \geq 0$ and $y_j \in \partial Y_j$:
– $\gamma_j(\lambda, y_j) = \sup\{q \leq \lambda \mid \exists p \in S \ s.t \ (p, q) \in \psi_j(y_j, f_j(y_j))\}$
– $\overline{\phi}_j(\lambda, y_j) = \{p \in S \mid (p, \gamma_j(\lambda, y_j)) \in \psi_j(y_j, f_j(y_j))\}$
– $\overline{\psi}_j(\lambda, y_j) = (\overline{\phi}_j(\lambda, y_j), \gamma_j(\lambda, y_j))$.
The value of $\gamma_j(\lambda, y_j)$ coincide with the allowance price whenever the pricing rule indeed admits λ as a possible value for the allowance price in y_j. Otherwise it is equal to the largest admissible allowance price below λ. Such an element exists thanks to Assumption (Compatibility) and because ψ_j has a closed graph. The Assumption (PR) also implies that $\overline{\phi}_j$ and $\overline{\psi}_j$ are u.s.c with non-empty convex compact values.

Concerning the influence of the allowance market on the consumers wealth, one cannot represent it using the initial allocation of allowances as a parameter because this allocation must be endogenously determined. However at equilibrium the quantity of allowances used in the economy must be equal to the initial allocation. Hence in order to endogenize the wealth transfers taking place on the allowance market, we implement fictious initial allocations in allowances as functions of the quantities of allowances used by the agents. Namely, we consider continuous mappings $\alpha : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}_+^{m+n}$ such that $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i((s_i), (t_j)) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j((s_i), (t_j)) \equiv$

$\sum_{i=1}^m s_i + \sum_{j=1}^n t_j$, and we interpret $(\alpha_i(s_i,t_j), \alpha_j(s_i,t_j))$ as the quantity of allowances allocated to consumers and producers when $((s_i),(t_j))$ are the quantity of allowances used by producers and consumers respectively. Using such a representation, the demands (x_i, s_i) of consumers correspond to a situation where the allowance market is (implicitly) cleared if and only if, $(x_i, s_i) \in \Delta_i^H(\sum_{j=1}^n f_j(y_j) - s_i, p, q, \tilde{r}_i((p,q),(y_j),(\alpha_i(f_j(y_j),(s_i))),(\alpha_j(f_j(y_j),(s_i))))$. Indeed, agent i usually makes its choice of allowance consumption facing a situation where the quantity of allowances available for pollution (prior to its consumption) is $A - \sum_{h\neq i} s_h$. Here A is unknown but one knows that whenever the allowance market is clear, A is such that $A + \sum_{j=1}^n f_j(y_j) = \sum_{k=1}^n s_k$, so that $A - \sum_{h\neq i} s_h = \sum_{j=1}^n f_j(y_j) - s_i$. Hence one sets agent i to make its choice of allowance consumption facing a situation where the quantity of allowances available for pollution (prior to its consumption) is $\sum_{j=1}^n f_j(y_j) - s_i$. In the following, we shall abusively let $\Delta_i^{\alpha,H}((p,q),(y_j),(s_i))$ stand for $\Delta_i^H(\sum_{j=1}^n f_j(y_j) - s_i, p, q, \tilde{r}_i((p,q),(y_j),(\alpha_i(f_j(y_j),(s_i))),(\alpha_j(f_j(y_j),(s_i))))$.

6.5 Equilibrium Correspondence

Under Assumptions (IP) and (C), the set of attainable commodities allocation, $\{((x_i),(y_j)) \in (\mathbb{R}_+^L)^m \times \prod_{j=1}^n Y_j \mid \sum_{i=1}^m y_j + \sum_{i=1}^m \omega_i = \sum_{i=1}^m x_i\}$ is compact. Hence there exist a compact ball K of R^L such that K^{m+n} contains it in its interior. Let us set $U = \{((p,q),(x_i,s_i),(y_j)) \in (S_{++} \times]-1,+\infty[) \times (int(K) \times]-1, H+1[)^m \times \prod_{j=1}^n \partial Y_j \mid p\cdot(y_j+\omega) + q\sum_{i=1}^m s_i > 0\}$,

We can now define an equilibrium correspondence parametrized by (α, λ, H) by setting : $F_1^{(\alpha,\lambda,H)} : U \to e^\perp \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{L+1})^m \times (e^\perp)^n$ equal to

$$(proj_{e^\perp}(\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \omega), q - \lambda, (\Delta_i^{\alpha,H}((p,q),(y_j),(s_i)) - (x_i,s_i)), \overline{\phi}_j(\lambda, y_j) - p)$$

F_1 is an equilibrium correspondence in the sense of the following lemma :

Lemma 3 *Assume (IP), (PF), (C), (IPR), (IS), (IR), (PR) (Compatibility) and (Flexibility) holds. Let* $((p,q),(y_j),(x_i),(s_i)) \in (F_1^{(\alpha,\lambda,H)})^{-1}(0,0,0,0)$, *such that for all i,* $w_i((p,q),(y_j),\alpha_i(f_j(y_j),(s_i)),\alpha_j(f_j(y_j),s_i)) > 0$. *One has :*

1. *if* $H = 0$, $((p,q),(x_i),(y_j,f_j(y_j)))$ *is a private equilibrium for the initial allocation of allowances* $(\alpha_i(f_j(y_j),0),\alpha_j(f_j(y_j),0))$, *and* $q = \lambda$.

2. *if $s_i < H$, $((p,q),(x_i,s_i),(y_j,f_j(y_j)))$ is a public equilibrium for the initial allocation of allowances $(\alpha_i(f_j(y_j),s_i),\alpha_j(f_j(y_j),s_i))$, and $q=\lambda$.*

Proof: *Indeed let us consider $((p,q),(x_i,s_i),(y_j)) \in (F_1^{(\alpha,\lambda,H)})^{-1}(0,0,0,0)$.*

Let us first show that for all j, $(p,q) \in \psi_j(y_j,f_j(y_j))$. First one clearly has $q=\lambda \geq 0$ and hence $p \in \overline{\phi}_j(q,y_j)$. Assume $(p,q) \notin \psi_j(y_j,f_j(y_j))$. Under (Compatibility) and (PR), the only possibility is that $q > \gamma_j(q,y_j)$ and $(p,\gamma_j(q,y_j)) \in \psi_j(y_j,f_j(y_j))$. As $p \in S_{++}$, Assumption $(Flexibility)$ then implies there exist q_1 such that $q > q_1 > \gamma_j(q,y_j)$ and $(p,q_1) \in \psi_j(y_j,f_j(y_j))$. This contradicts the definition of $\gamma_j(q,y_j)$. Hence one has $(p,q) \in \psi_j(y_j,f_j(y_j))$.

As consumer i demand of allowances is equal to s_i and one always has $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ $(f_j(y_j)\ ,(s_i))+\sum_{j=1}^n \alpha_j(f_j(y_j),(s_i)) = \sum_{j=1}^n f_j(y_j)+\sum_{i=1}^m s_i$, the allowance market is clear provided the initial allocation is equal to $(\alpha_i(f_j(y_j),s_i),\alpha_j(f_j(y_j),s_i))$.

Now, one has $proj_{e^\perp}(\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m \omega_i) = 0$. Walras law and clearance of the allowance market then imply clearance of the 1 to L commodities markets.

Moreover, as $w_i((p,q),(y_j),\alpha_i(f_j(y_j),(s_i)),\alpha_j(f_j(y_j),s_i)) > 0$, the auxiliary incomes coincide with the original ones and hence the auxiliary demand coincide with the original demand of consumer i when his consumption of allowance is restricted to be below H.

Finally, if $H=0$ the demand in allowance coincides with this at a private equilibrium of the economy.

If $s_i < H$, it coincides with this at a public equilibrium of the economy.

6.6 Main Lemma

The proofs of Theorems 2 to 5 are based on the following lemma which shows that the degree of F_1 can be related to the degree of the initial equilibrium correspondence. Indeed, given (α,λ,H) let us consider the family of correspondences $F_t^{(\alpha,\lambda,H)} : U \to e^\perp \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{L+1})^m \times (e^\perp)^n$ defined by

$$(proj_{e^\perp}(\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \omega), q - t\lambda, (\Delta_i^{\alpha,tH}((p,q),(y_j),s_i) - (x_i,s_i)), \overline{\phi}_j(t\lambda,y) - p)$$

Now, it is clear that under (Compatibility), $((p,q),(x_i,s_i),(y_j)) \in (F_0^{(\alpha,\lambda,H)})^{-1}$ $(0,0,0,0)$ if and only if $q=0$, $s_i=0$ for all i and $(p,(x_i),(y_j))$ is a zero of E_0. Moreover it is clear that whatever may (α,λ,H) be the degree of $F_0^{(\alpha,\lambda,H)}$ is equal to this of E_0 and hence is non-zero according to the proof of Theorem 1.

Finally we show the degree of F_0 is equal to this of F_1.

Let us consider the following auxiliary survival assumption :

Assumption $(\mathbf{SA}^\lambda)$ *For all $\mu \in [0,\lambda]$, for all $(p,(y_j)) \in S \times \prod_{j=1}^n \partial Y_j$ such that $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0$ and $p \in \cap_j \overline{\phi}_j(\mu, y_j)$ one has $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \omega) > 0$,*

Lemma 4 *Under Assumptions (IP), (PF),(C),(IPR), (IS), (ISPR), (IR), (PR), (Compatibility), (Flexibility) and (SA$^\lambda$),*

$$deg(F_0^{(\alpha,\lambda,H)},(0,0,0,0)) = deg(F_1^{(\alpha,\lambda,H)},(0,0,0,0)).$$

Proof: *Let λ such that SA^λ holds. For sake of clarity let us denote F_t instead of $F_t^{(\alpha,\lambda,H)}$. It is clear that F_t defines an homotopy between F_0 and F_1. Let us show that the set $\cup_{t\in[0,1]} F_t^{-1}(0)$ is compact. The homotopy invariance property of the degree then implies the result (see (9)).*

Indeed consider a sequence $(p^n, q^n, (x_i^n, s_i^n), (y_j^n)) \in \cup_{t\in[0,1]} F_t^{-1}(0,0,0,0)$. For all n, there exist t^n such that $F_{(t^n)}(p^n, q^n, (x_i^n, s_i^n), (y_j^n)) = 0$.

By construction the transfers on the allowance market are balanced. Hence, using Walras one obtains that $\sum_{i=1}^m x_i^n - \sum_{j=1}^n y_j^n - \omega = 0$. Therefore for all n ,$((x_i^n),(y_j^n))$ lies in the set of attainable allocations which is compact. Moreover one has $t^n \in [0,1]$, $p^n \in S$, $q^n \in [-1,\lambda]$, $s_i^n \in [0,H]$. Hence $(t^n, (x_i^n, s_i^n), (y_j^n), p^n, q^n,)$ lie in a compact set and there exists a subsequence converging to $(t,(x_i,s_i),(y_j),p,q)$ where $t \in [0,1]$, $x_i \in K$ and $s_i \in [0,H]$, $\sum_{j=1}^n y_j + \omega = \sum_{i=1}^m x_i \geq 0$, $(p,q) \in S \times [-1,+\infty[$.

It remains to show that $(p,q,(x_i,s_i),(y_j)) \in U$ and that $F_t(p,q,(x_i,s_i),(y_j)) = (0,0,0,0)$.

First as $((x_i),(y_j))$ is an attainable allocation, one has $x_i \in int(K)$.

Second as Δ_i^H has values in $\mathbb{R}^L \times [0,H]$ it is clear that $s_i \in [0,H] \subset]-1,H+1[$.

Third as $q = t\lambda \geq 0$ one clearly has $q > -1$.

Fourth as $\overline{\phi}_j$ is u.s.c, one has, for all j, $p \in \overline{\phi}_j(t\lambda, y_j)$ and, as $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \geq 0$, Assumption SA^λ implies that $p \cdot (\sum_{j=1}^n y_j + \omega) > 0$. Hence $(p, q, (y_j), \alpha_i((f_j(y_j)), (s_i)), \alpha_j((f_j(y_j)), (s_i))) \in V$. This implies the auxiliary individual income, $\tilde{r}_i$, all are strictly positive. Given the fact that x_i^n is bounded, the boundary condition on the demand then implies that $p \in S_{++}$. This proves that $(p, q, (x_i, s_i), (y_j)) \in U$.

Given the continuity properties of correspondences F_t and Δ_i, one then has $(x_i, s_i) \in \Delta_i(p, q, (y_j), s_i)$ for all i and $F_t((y_j), p, q, (s_i)) = 0$. This ends the proof. □

6.7 Proof of Theorem 2

Given the compactness of the attainable allocations and the u.s.c of the pricing rules, it is clear that assumption (SA$^\lambda$) holds for all λ in a neighborhood of zero. Hence one has according to Lemma4 that for all (α, H) and for λ in a neighborhood of zero, $deg(F_1^{(\alpha,\lambda,H)})$ is non-zero. Let us then set $\alpha_j(f_j(y_j), (s_i)) = f_j(y_j)$ and $\alpha_i \equiv 0$. For such an α Assumptions (SA$^\lambda$) and (IR) imply that for all $((p, q), (x_i, s_i), (y_j)) \in (F_1^{(\alpha,\lambda,H)})^{-1}(0, 0, 0, 0)$, one has $w_i((p, q), (y_j), \alpha_i(f_j(y_j), (s_i)), \alpha_j(f_j(y_j), (s_i)) > 0$. It then suffices to apply Lemma 3 to end the proof. □

6.8 Proof of Theorem 3

Assumption SA implies SA^λ holds for all $\lambda \geq 0$. Now if one chooses α as in the proof of Theorem 2, it is clear that for all λ, for all $((p, q), (x_i, s_i), (y_j)) \in (F_1^{(\alpha,\lambda,H)})^{-1}(0, 0, 0, 0)$, one has $w_i((p, q), (y_j), \alpha_i(f_j(y_j), (s_i)), \alpha_j(f_j(y_j), s_i)) > 0$. It then suffices to apply Lemma 3 to end the proof.

6.9 Connectedness Lemma

In order to prove Theorems 4 and 5 we shall use the following lemma. Under Assumption SA, Lemma 4 implies that for all (λ, α, H) the degree of $F_1^{(\alpha,\lambda,H)}$ is non-zero. For a given $\overline{\lambda}$, let us consider the family of correspondences $G_t = F_1^{(\alpha,t\overline{\lambda},H)}$ and let f be a continuous function on $U \to \mathbb{R}$.

Lemma 5 *Let $a := \sup_{\eta \in G_1^{-1}(0)} f(\eta)$ and $b := \inf_{\eta \in G_0^{-1}(0)} f(\eta)$. If $a < b$ then for all $c \in [a, b]$ there exists $t \in [0, 1]$ and $\eta \in G_t^{-1}(0)$ such that $f(\eta) = c$.*

Proof: *Assume this does not hold, that is there exists $c \in [a, b]$ such that $\forall t \in [0, 1]$, $\forall \eta \in G_t^{-1}(0)$ $f(\eta) \neq c$. As $\cup_{t\in[0,1]} G_t^{-1}(0)$ is a subset of equilibria compact in U, and f is continuous one necessarily has $c \in]a, b[$.*

Let $V = U \cap f^{-1}]c, +\infty[$. It is an open set such that $G_0^{-1}(0) \subset V$ because $G_0^{-1}(0) \subset U$ and by definition of b, $f(G_0^{-1}(0)) \subset [b, +\infty[\subset]c, +\infty[$. Also, $\cup_{t\in[0,1]} G_t^{-1}(0) \cap \partial V = \emptyset$ because $\forall t \in [0, 1]$ $\forall \eta \in G_t^{-1}(0)$ $f(\eta) \neq c$. This implies first, thanks to the excision property of the degree, that $deg((G_0)_{|V}, 0) = deg((G_0), 0) \neq 0$. Second it implies that $\cup_{t\in[0,1]}((G_t)_{|V})^{-1}(0))$ is compact in V. Using conservation of the degree by homotopy, one gets $deg((G_1)_{|V}, 0) = deg((G_0)_{|V}, 0) \neq 0$ This implies there exist a zero η' of G_1 such that $f(\eta') > c$ and hence $f(\eta') > a$ This contradicts the fact that every zero η of G_1 satisfies $f(\eta) \leq a$ and hence ends the proof. $\square$

6.10 Proof of Theorem 4

Let us show that there exist a private equilibrium for every initial endowment in allowance $((a_i), (a_j)) \in \mathbb{R}_+^{n+m} \setminus \{0\}$.

If $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j \geq \overline{a} := \inf\{\sum_{j=1}^n f_j(y_j) \mid (p, (x_i), (y_j))$ equilibrium of the initial economy $\}$, there exist according to Lemma 1 a private equilibrium of the enlarged economy with a null allowance price for the initial allocation of allowances $((a_i), (a_j))$. This completes the proof for this particular case.

Let us now consider the case where $0 < \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j < \overline{a}$. We set :
- $\alpha_i(f_j(y_j), (s_i)) = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j} (\sum_{j=1}^n f_j(y_j) + \sum_{i=1}^m s_i)$
- $\alpha_j(f_j(y_j), (s_i)) = \frac{a_j}{\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j} (\sum_{j=1}^n f_j(y_j) + \sum_{i=1}^m s_i)$.

Under Assumption (R) and (SA) it is clear that for such an α, for all λ, for all $((p, q), (x_i, s_i), (y_j)) \in (F_1^{(\alpha,\lambda,H)})^{-1}(0, 0, 0, 0)$, one has $w_i((p, q), (y_j), \alpha_i(f_j(y_j), (s_i)), \alpha_j(f_j(y_j), s_i)) > 0$. So as in the proof of Theorem 3 there exist a private equilibrium for all non-negative allowance price λ with an initial allocation of allowance made according to α, that is proportional to $((a_i), (a_j))$. It then remains to show that there exist an equilibrium with aggregate allowance supply exactly equal to $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j$.

Let us therefore consider ϵ such that $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j > \epsilon > 0$ and $\overline{\lambda}$ the corresponding bound on allowance price given by Assumption (Amenability). Considering the family of applications $G_t = F_1^{(\alpha, t\overline{\lambda}, 0)}$, one has $sup_{x \in G_1^{-1}(0)} \sum_{j=1}^n f_j(y_j) \leq \epsilon$. Hence one can apply the preceding Lemma to the function $\sum_{j=1}^n f_j$ in order to show that for every $c \in [\epsilon, \overline{a}]$ there exist $t \in [0,1]$ and $((p,q), (x_i, s_i), (y_j)) \in G_t^{-1}(0)$ such that $\sum_{j=1}^n f_j(y_j) = c$. In particular there exist $\overline{t} \in [0,1]$ and $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j)) \in G_{\overline{t}}^{-1}(0)$ such that $\sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j) = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j$. According to Lemma 3, $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j)))$ is a private equilibrium of the enlarged economy with the initial allocation of allowances $((a_i), (a_j))$. This ends the proof. □

6.11 Proof of Theorem 5

Let us show that there exist a public equilibrium for every initial endowment in allowance $((a_i), (a_j)) \in \mathbb{R}_+^{n+m} \setminus \{0\}$

Let us therefore consider α as in the proof of Theorem 4 and $H > \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j$. Also let us choose ϵ such that $\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j > \epsilon > 0$ and then $\overline{\lambda} > 0$ greater than the bound on the allowance price associated to $\frac{\epsilon}{2}$ given by Assumption (Amenability) and also greater than the supremum of the agents marginal utility[42] for the environment on the set of attainable allocation. Such a $\overline{\lambda}$ exists thanks to the continuity of the marginal utility for the environment. Moreover at an equilibrium for which the allowance price is $\overline{\lambda}$ the total demand in allowance is strictly less than ϵ.

Let us now consider the family of applications $G_t = F_1^{(\alpha, t\overline{\lambda}, H)}$.Similar arguments to those in the proof of Theorem 4 then imply that there exist a zero $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j)))$ of some G_t such that $\sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j) + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j$. Now, according to Lemma 7 such a zero is a public equilibrium for the initial allocation of allowances $((a_i)(a_j))$ if for all i, $s_i < H$. A sufficient condition therefore is that $\sum_{j=1}^n f_j(y_j) + \sum_{i=1}^m s_i < H$. This is the case here as $\sum_{j=1}^n f_j(y_j) + \sum_{i=1}^m s_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n a_j < H$. □

[42] Normalized such that the vectors of agents marginal utilities for the commodities lie in the simplex

Bibliographie

[1] IPCC (2001) IPCC Third Assessment Report – Climate Change 2001

[2] Arrow, K.J (1969) "The organization of economic activity : Issues pertinent to the Choice of Market versus Non-Market allocation", in Joint economic commitee, The analysis and evaluation of Public Expenditures ; The PPB System, Washington DC : Government Printing Office, pp 47-64.

[3] Bonnisseau, J-M. and Cornet, B. (1988) "Existence of equilibria when firms follow bounded losses pricing rules" Journal of Mathematical Economics, 1988, vol. 17, issue 2-3, pages 119-147

[4] Bonnisseau, J-M. (1992)"Existence of equilibria in the presence of increasing returns : A synthesis" J. Math. Econom. vol. 21(5), pp 441-452.

[5] Bonnisseau, J-M. (1997) "Existence of Equilibria in Economies with Externalities and Nonconvexities. " Set-Valued Analysis, Volume 5, Number 3, pp. 209-226(18)

[6] Bonnisseau, J-M. and Médecin, J-P (2001). " Existence of marginal pricing equilibria in economies with externalities and non-convexities." J. Math. Econom. 36, no. 4, 271–294.

[7] Boyd, J. and Conley, John P. (1997) "Fundamental Nonconvexities in Arrovian Markets and a Coasian Solution to the Problem of Externalities" Journal of Economic Theory, Vol. 72, 1997, pp. 388-407.

[8] Cass, D. and Citanna, A. (1998) "Pareto Improving Financial Innovation in Incomplete Markets," Economic Theory 11 : 467-494.

[9] Cellina, A. and Lasota, A. (1969). – "A New Approach to the Definition of Topological Degree for Multivalued Mappings", Atti della Academia Nazionale dei Lincei, Rendiconti. Classe de Scienze Fisiche, Mathematiche e Naturali, 47, pp. 434-440.

[10] Clarke, F., 1983, "Optimization and nonsmooth analysis" (Wiley, New York).

[11] (2005) Conley, J and Smith, S. , "Coasian equilibrium," Journal of Mathematical Economics, vol. 41(6), pp 687-704

[12] Dehez,P. and Drèze, J. (1988). "Competitive Equilibria with Quantity-taking Producers and Increasing Returns". JMathE ; V.17, pp. 209-23

[13] Drèze,J. "Existence of an Exchange Equilibrium under Price Rigidities", 1975, IER.

[14] Elul, R., (1995) "Welfare Effects of Financial Innovation in Incomplete Markets Economies with Several Consumption Goods," Journal of Economic Theory 65 : 43-7

[15] Guesnerie, R. (2003) (sous la direction de) "Kyoto et l'économie de l'effet de serre ", Conseil d'analyse économique n° 39, Paris, La Documentation française.

[16] Giraud, G. (2001) "An algebraic index theorem for non-smooth economies" Journal of Mathematical Economics, V. 36(4), pp. 255-269.

[17] Jamin,A. and Mandel,A. (2006) "A general equilibrium analysis of emission allowances." Cahiers de la Maison des Sciences Economiques, série bleue 2006.03.

[18] Jouini, E (1992) "An Index Theorem for Nonconvex Production Economies", Journal of Economic Theory, 57 (1), 176-196.

[19] Jouini, E (1992) "Existence of the equilibria without free disposal assumption", Economics Letters, 38, 37-42.

[20] Laffont, J, J. (1978) Effets externes et théorie économique, Monographiee du Séminaire d'économétrie. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

[21] Mandel A. (2006) "An index theorem for production economies with externalities", cahiers du C.E.S .

[22] Schumpeter, J. "Théorie de l'évolution économique Recherches sur le profit, le crédit, l'intérêt et le cycle de la conjoncture" Dalloz, Paris, 1999.

Chapitre 3

Marchés de droits et Optimalité au sens de Pareto

Résumé

Cet article analyse l'influence de l'ouverture d'un marché de droits, du type permis d'émissions négociables, sur l'optimalité au sens de Pareto des équilibres d'une économie avec externalités. On montre que grâce à l'ouverture d'un tel marché les optima peuvent être décentralisés comme équilibres de tarification marginale. Néanmoins l'ensemble des équilibres est beaucoup plus grand que celui des optima. Afin de caractériser les équilibres optimaux, on étudie divers raffinements de la notion d'équilibre par l'encouragement de la participation des agents au marchés de droits.

Welfare improvement properties of an allowance market in a production economy

Antoine Mandel[43]

Centre d'Economie de la Sorbonne, UMR 8174, CNRS-Université Paris 1.

Abstract

This paper studies the welfare improvement properties of a market of allowances in an economy with a single type of externality. We show that thanks to the opening of such a market the Pareto optima can be decentralized as marginal pricing equilibria. However, the set of equilibria is much larger than this of Pareto optima. In order to discriminate the efficient equilibria we introduce a demand revealing mechanism tailored for this framework.

Key Words : General Equilibrium Theory, Pareto optimality, Externalities, Markets of allowances.

[43]The author is grateful to Professor Jean-Marc Bonnisseau for his guidance and many useful comments. All remaining errors are mine.

1 Introduction

It has long been recognized that the interactions between the economic activities and the environment have effects which are not properly reflected by the market prices. Those effects have thus been referred to as externalities. An abundant theoretic literature has focused on the means to overcome this failure of the market, that is to design economic models encompassing externalities whose equilibria have suitable Pareto optimality properties. A first branch of the literature pioneered by Arrow (2), proposed the creation of artificial commodities (hereafter called Arrovian commodities) which associate to every couple of agents and every commodity in the economy, the influence caused by the use of this commodity by the first agent on the second. This work and its extensions by Laffont (10), Bonnisseau (3) and others can be seen as a formalization of the Coase Theorem (see (5)) in a general equilibrium framework. On another hand, in (4), Boyd and Conley argue that externalities can be defined intrinsically and treated as public bads (or public goods in case of positive externalities). They then introduce markets of allowances for externalities and show that the associate Lindhal equilibria are Pareto optimal.

Contemplating the growing interest in "pollution permits" markets such as the European Union Emission Trading Scheme, one may assume that this literature has influenced the governmental policies dealing with environmental economic issues. Indeed the creation of those markets seem at first sight a direct application of this theoretic work. However a closer look brings to light that those markets actually do not feet in any of the models cited above. Indeed they are markets of allowances for public bads in the sense of Boyd and Conley, but in general the allowance is used only as a private good by the polluters. This is underlined by the fact that the justification for the creation of those markets is that they allow for reduction of the pollution at the least possible cost, not that they lead to Pareto optimality. Even when consumers have access to those markets, the free rider problem make it doubtful that a Lindhal equilibrium may be implemented. On the opposite, our approach is to underline the fact that when it creates an allowance market the government also creates a public good consisting in the difference between the situation that prevails under *laissez-faire* and the level of allowances it supplies to the economy. Our aim is to determine wether this particular type of public good provision may lead to Pareto optimal outcomes.

We focus on a general equilibrium model with a finite number of goods and agents.

The firms production causes an external effect on consumers. The government forces by legal means the producers to use as input the quantity of allowances corresponding to the externality they cause and initially endow the agents with a certain quantity of allowances. Agents may then trade these on a market. We consider various possible structure for the allowance market : the consumers may or may not have access to the market as buyers (i.e use the allowance as a public good), the consumption of allowances by consumers may be subsidized by the government.

Building upon a result of Bonnisseau (3), we show that Pareto optima can be decentralized as marginal pricing equilibria in such an economy independently of the market structure. Meanwhile the allowance market appears as a complex tool allowing at the same time to define a value for the environment, to influence the firms behavior and to implement wealth transfers.

However the analogous of the first welfare Theorem does not hold, that is marginal pricing equilibria are not necessarily Pareto optimal. In particular when the consumers have access to the allowance market as buyers, a necessary condition for an equilibrium to be Pareto optimal is paradoxically that no allowance is purchased by the consumers (as in Smith and al. (11)). Hence, the only way to obtain a Pareto optimal outcome is that the government chooses a proper initial allocation. In this respect, we provide a simple mechanism to implement optimality : the government diminishes its supply of allowances proportionally to the consumers purchase.

2 The Model

We consider an economy with a finite number L of commodities labeled by $\ell = 1 \cdots L$, lying within an environment which is characterized by a real parameter τ.

There are n firms in the economy indexed by $j = 1 \cdots n$ whose production possibilities are described by a closed set Y_j. As they produce, firms influence the environment. We measure according to the differentiable function $f_j : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}_-$ the damage caused to the environment by firm j. The actual state of the environment when the firms choose a production scheme $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j$ is $\sum_{j=1}^n f_j(y_j)$.

There are m consumers in the economy indexed by $i = 1 \cdots m$. They gain utility from the consumption of strictly positive quantities of commodities 1 to L and are sensitive to the state of the environment. Their preferences are represented by a quasi-concave and differentiable utility function u_i defined on $\mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}$ which associates to a bundle of commodities $x_i \in \mathbb{R}^L_{++}$ and to an environmental parameter $\tau \in \mathbb{R}_-$ an utility level $u_i(x_i, \tau)$. We shall denote by $P_i(x_i, \tau)$ the set of elements $\{(x'_i, \tau') \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_- \mid u_i(x'_i, \tau') \geq u_i(x_i, \tau)\}$ corresponding to the pair of commodity bundle and state of the environment preferred to (x_i, τ) by agent i. We shall assume in the remaining of the paper that the utility functions are monotone, locally non-satiated in commodities, increasing with the environment, and that one of them is strictly monotone[44]. This will ensure in particular equilibrium prices are positive.

The initial resources of the economy are set equal to $\omega \in R^L_{++}$.

The remaining of this paper is concerned with the Pareto optimal outcomes of this economy defined as :

Definition 1 *An element* $((x_i), (y_j) \in (\mathbb{R}^L_{++})^m \times \prod_{j=1}^n Y_j$ *is an attainable allocation if* $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j + \omega$.
An element $((x_i), (y_j)) \in (\mathbb{R}^L_{++})^m \times \prod_{j=1}^n Y_j$ *is a Pareto optimum if it is an attainable allocation and if there exist no attainable allocation* $((x'_i), (y'_j))$ *such that for all* i, $u_i(x'_i, \sum_{j=1}^n f_j(y'_j)) \geq u_i(x_i, \sum_{j=1}^n f_j(y_j))$, *and for at least an* i_0, $u_{i_0}(x'_{i_0}, \sum_{j=1}^n f_j(y'_j)) > u_{i_0}(x_{i_0}, \sum_{j=1}^n f_j(y_j))$.

A result of Bonnisseau (3) entails a general characterization of these Pareto optima :

Theorem 1 (Theorem 3 in Bonnisseau (3)) *If* $((\overline{x}_i), (\overline{y}_j))$ *is a Pareto optimum of* $\mathcal{E}$, *then there exist* $(\overline{p}, \overline{q}) \in \mathbb{R}^{L+1}_+$ *such that*

1. *For all* i, *there exist* $\overline{q}_i$ *such that* $(\overline{p}, \overline{q}_i) \in N_{P_i(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))}(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$ *and* $\sum_{i=1}^m \overline{q}_i = \overline{q}$
2. *For all* j, $\overline{p} + \overline{q} \nabla f_j(\overline{y}_j) \in N_{Y_j}(\overline{y}_j)$

Building on this result, which extends the optimality properties of marginal pricing (see Guesnerie (7)) to a framework encompassing externalities, we focus on

[44] So that one can apply Theorem 3 of Bonnisseau (3).

the possibility to decentralize Pareto optima as marginal pricing equilibria for appropriate market structures. Let us recall that marginal pricing equilibria coincide with the standard competitive equilibria under additional convexity assumptions but also allows to deal with increasing returns to scale in the production sector.

Now, when there exist markets for standard commodities only, a price equilibrium with marginal tarification of the economy may be defined as :

Definition 2 *An allocation $(\overline{x}_i), (\overline{y}_j))$ in $(\mathbb{R}^L_{++})^m \times \prod_{j=1}^n Y_j$ is a marginal pricing equilibrium with transfers if there exist a price $p \in \mathbb{R}^L_+$ and a wealth allocation $(w_1, \cdots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ with $\sum_{i=1}^m w_i = p \cdot (\omega + \sum_{j=1}^n y_j)$ such that :*

1. *For every i, $\overline{x}_i$ maximizes $u_i(\cdot, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$ among the feasible consumption plans $\{x_i \in \mathbb{R}^L_{++} \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$;*
2. *For all j, $\overline{p} \in N_{Y_j}(\overline{y}_j)$;*
3. *$\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \sum_{i=1}^m \omega_i$;*

and it is well-known [45] that, when there are non-trivial environmental effects none of these equilibria is Pareto optimal. Indeed, at such an equilibrium the negative external effects of production on the environment are not reflected by the market prices.

3 Markets of allowances

A solution to this failure of standard markets is given by the Coase Theorem. It advocates the opening of allowance markets on which consumers sells to producers the right to deteriorate the environment against some financial compensation. However the first tentative implementations of the Coase Theorem in a general equilibrium framework by Arrow (2) and Laffont (10) requested the opening of one allowance market per commodity and per couple of agents. On those markets agent i and j were supposed to trade the influence on agent j of the use of the good l by agent i. As those authors themselves acknowledge, such a setting is far from realistic. In practice, in the US SO2 market or in the European Union

[45] What one can also check by comparing the first order necessary conditions for equilibria with the characterization of Pareto optima given in Lemma 1.

Emission Trading Scheme, a single market of allowances has been opened whose functioning can be summarized as follows.

Firms are forced by legal means to use as input in their production process a quantity of allowances corresponding to their actual influence on the environment. Namely, in order to produce y_j, firm j should use as input a quantity $f_j(y_j)$ of allowances. Meanwhile the government supplies allowances to the economy by initially allocating a quantity A among consumers and producers. This leads to the opening of an allowance market on which firms may purchase from the other agents the quantity of allowances they need to set in motion their production plans.

This type of market, where the allowance bears on an externality whose essence is well defined, has been studied by Boyd and al. in (4) and Conley and al. in (6). These authors treat allowances symmetrically to public good and use Lindhal-like personalized prices in order to obtain decentralization results. Focusing on the symmetry with public goods, it seems to us these authors do not take in consideration an important particularity of the allowance market : by fixing the endowment in allowances the government freely supplies a public good to consumers : the difference between this endowment and the situation that prevails under *laissez-faire*. This particular way of providing public goods partly relax the free-riding problems. Hence, one may obtain decentralization results for simple market mechanisms, and it is not necessary to introduce personalized prices.

4 Private Equilibria

Indeed, let us consider the simplest situation where the allowance is exchanged only as a private good among producers. The associated equilibrium concept is :

Definition 3 *An allocation $((\overline{x}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j)))$ in $(\mathbb{R}^L_{++})^m \times \prod_{j=1}^n (Y_j \times \mathbb{R}_-)$ is a marginal pricing equilibrium with transfers and private use of the allowance* [46] *if there exist a price $(\overline{p}, \overline{q}) \in \mathbb{R}^{L+1}_+$ and a wealth allocation $(w_1, \cdots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ with $\sum_{i=1}^m w_i = p \cdot (\omega + \sum_{j=1}^n \overline{y}_j)$ such that :*

1. *For every i, $\overline{x}_i$ maximizes $u_i(\cdot, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$ in the budget set $\{x_i \in \mathbb{R}^L_{++} \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$;*

[46] which we will refer to as private marginal pricing equilibrium for short.

2. *For all* j, $\overline{p} + \overline{q}\nabla f_j(\overline{y}_j) \in N_{Y_j}(\overline{y}_j)$;
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$;
4. $\sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j) + A = 0$.

Using the characterization of Pareto optima in Lemma 1, it appears clearly that :

Proposition 1 *For every Pareto optimum, there exist an initial allocation of allowances which allows to decentralize it as a private marginal pricing equilibrium with transfers.*

Proof: *Given the quasi-concavity of the utility function, a sufficient condition for an* $\overline{x}_i$ *satisfying the budget constraint to solve the consumer problem at a private marginal pricing equilibrium is that there exist* $q_i \in \mathbb{R}$ *such that* $(q_i, \overline{p}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))}(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$. *This condition as well as* (2) *and* (3) *are clearly satisfied at a Pareto optimum according to Theorem* 1. *Hence given a Pareto optimum, it suffices to choose a wealth allocation letting each consumption plan satisfying the budget constraint and an initial allocation of allowances equal to the firms demand, in order to decentralize it as a marginal pricing equilibrium with transfers and private use of the allowance.* □

Hence whenever the environment acquires (through the allowance market) a value, Pareto optima may be decentralized as marginal pricing equilibria. Nevertheless there remains a huge indeterminacy on the allocations of allowances which entail Pareto optimality. *A priori* the probability to reach a Pareto optima is rather small, so to say, negligible : when the set of equilibria is a non-empty differentiable manifold, the optimality condition $\sum_{i=1}^m q_i = q$ implies the set of Pareto optimal equilibria is a submanifold of codimension 1. To overcome this indeterminacy, we shall study refined notions of equilibria.

5 Public Equilibria

First, let us determine to which extent the opening of the allowance market to public use by the consumers can diminish the number of non-optimal equilibria. When the allowance market is opened to consumers they may purchase it as a public good in order to improve the state of the environment and their program is turned to maximize, given the other agents purchase of allowances $(\overline{s}_k)_{k\neq i}$, the utility $u_i(x_i, -A + \Sigma_{k\neq i}\overline{s}_k + s_i)$ they get from the consumption bundle $(x_i, s_i) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+$ of regular commodities and allowances. Accordingly the equilibrium concept is turned to :

Definition 4 *An allocation* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j)))$ *in* $(\mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+)^m \times \prod_{j=1}^n (Y_j \times \mathbb{R}_-)$ *is a public marginal pricing equilibrium with transfers* [47] *if there exist a price* $(\overline{p}, \overline{q}) \in \mathbb{R}^{L+1}_+$ *and a wealth allocation* $(w_1, \cdots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ *with* $\sum_{i=1}^m w_i = (\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\omega + \sum_{j=1}^n \overline{y}_j, A + \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$ *such that :*

1. *For every* i, $(\overline{x}_i, \overline{s}_i)$ *maximizes* $u_i(x_i, -A + \sum_{k\neq i} \overline{s}_k + s_i)$ *among the feasible consumption plans* $\{(x_i, s_i) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+ \mid \overline{p} \cdot x_i + \overline{q} s_i \leq w_i\}$ *;*
2. *For all* j, $\overline{p} + \overline{q}\nabla f_j(\overline{y}_j) \in N_{Y_j}(\overline{y}_j)$*;*
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$ *;*
4. $\sum_{i=1}^m \overline{s}_i = \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j) + A$.

At such a public equilibrium, the first-order conditions for the consumers program are given by the following Lemma :

Lemma 1 *Let* $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^L_{++}$ *:*

- *The bundle* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i)$ *with* $\overline{s}_i > 0$ *solves the consumer problem if and only if* $(\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\overline{x}_i, \overline{s}_i) = w_i$ *and* $(\overline{p}, \overline{q}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i)}(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i)$.
- *The bundle* $(\overline{x}_i, 0)$ *solves consumer i program if and only if* $\overline{p} \cdot \overline{x}_i = w_i$ *and there exist* $\overline{q}_i \leq \overline{q}$ *such that* $(\overline{p}, \overline{q}_i) \in N_{P_i(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i)}(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i)$.

Proof: *Given the quasi-concavity of the utility function, first-order conditions are necessary and sufficient. Moreover, non-satiation implies the budgetary constraint is necessarily binding.*

Now at a bundle $(\overline{x}_i, \overline{s}_i) \in \mathbb{R}^{L+1}_{++}$, *no other constraint than the budgetary one may be binding so that the bundle is optimal if and only if* $(\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\overline{x}_i, \overline{s}_i) = w_i$ *and* $(\overline{p}, \overline{q}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i)}(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i)$.

At a bundle $(\overline{x}_i, 0)$ *the constraint* $\overline{s}_i \geq 0$ *is binding so that it is sufficient and necessary for optimality that* $\overline{p} \cdot \overline{x}_i = w_i$ *and that there exist* $\mu_i \geq 0$ *such that* $(\overline{p}, \overline{q}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i)}(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m \overline{s}_i) + \mu_i(0, 1)$.

[47] *in extenso :* marginal pricing equilibrium with transfers and public use of the allowances

The proof then proceeds easily.

This characterization yields that every Pareto optimum can be decentralized as a public equilibrium :

Proposition 2 *For every Pareto optimum, there exist an initial allocation of allowances which allows to decentralize it as a public marginal pricing equilibrium with transfers.*

Proof: *Let* $(\overline{x}_i), (\overline{y}_j)$ *be a Pareto optimal allocation. According to Proposition* 1 *there exist a price* $(\overline{p}, \overline{q})$ *and a wealth distribution* (w_i) *such that it can be decentralized as a private equilibrium. In order to show, that it may also be decentralized as a public equilibrium, it suffices to show that* $(\overline{x}_i, 0)$ *solves the consumer program at a public equilibrium.*

Now, from the proof of Proposition 1 *one knows that there exist* $\overline{q}_i \in \mathbb{R}$ *such that* $(\overline{p}, \overline{q}_i) \in N_{P_i(\sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j), \overline{x}_i)}(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$*. Using monotonicity of the utility functions, one in fact has* $\overline{q}_i \geq 0$ *for all* i*. Using Pareto optimality of the equilibrium, one has* $\sum_{i=1}^m \overline{q}_i = \overline{q}$*, and hence* $\overline{q}_i \leq \overline{q}$*. Hence for all* i *there exist* $q_i := \overline{q}_i \leq q$ *such that* $(\overline{p}, \overline{q}_i) \in N_{P_i(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))}(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$*. Using clearance of the allowance market, and the fact that* $\overline{p} \cdot \overline{x}_i = w_i$*, sufficient condition for* $(\overline{x}_i, 0)$ *to solve the consumers program are satisfied according to Lemma* 1*. The proof then proceeds as for Proposition 1.* □

Moreover, Lemma 1 also provides a testable necessary condition for optimality. This condition already underlined by Smith and al. in (11) is that at an optimum, consumers are priced out of the allowance market. Indeed at an optimum the allowance price must be equal to the sum of marginal utilities for the environment and hence greater than each of these marginal utilities taken individually. For the consumer, such a situation is acceptable only if he has no allowances left to sale. In other words, a public equilibrium is Pareto optimal only if none of the consumers actually purchase allowances. Namely, one has

Proposition 3 *A public marginal pricing equilibrium* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j)))$ *is Pareto optimal only if for all* i*,* $\overline{s}_i = 0$*.*

Proof: *Let* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j)))$ *be a public marginal pricing equilibrium and* $(\overline{p}, \overline{q})$ *the corresponding equilibrium price. Let us assume that one of the* s_i *is positive. It implies according to Lemma* 1 *that* $(\overline{p}, \overline{q}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))}(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$. *Now, the regularity of the utility functions imply that* $N_{P_i(\overline{x}_i,\, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))}\ (\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$ *is a half line whenever* $(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j)) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}$. *In other words, given* $\overline{p}$, *for all* i *there exist a single* $\overline{q}_i$, *such that* $(\overline{p}, \overline{q}_i) \in N_{P_i(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))}\ (\overline{x}_i, \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$. *The strict monotonicity of the utility functions with regards to the environment imply that all those* q_i *are positive. According to the preceding, one of those is equal to* q. *Therefore, one necessarily has* $\sum_{i=1}^m q_i > q$ *and the equilibrium can not be Pareto optimal.* $\Box$

Paradoxically, the interest of opening the allowance market to consumers is to detect they do not participate in it.

On another hand, the set of public equilibria is a better approximation of the set of Pareto optima than the set of private equilibria as there are less public than private equilibria. Indeed while one can associate to every public equilibrium a private equilibrium by subtracting to every consumer endowment in allowances the amount it purchases at equilibrium, one can associate to a private equilibrium a public one only if at this private equilibrium every consumer marginal utility for the environment is lower than the allowance price.

To sum up, the opening of the allowance market to the consumers withdraw part of the indeterminacy on the optimality properties of the equilibria and provides a testable necessary condition for optimality, that consumers are priced out of the allowance market.

6 Subsidized Equilibria

Pursuing in the direction of refinement through public use of the allowance, let us now consider situations where the government amplifies the consumers demand in allowances by diminishing proportionally to the consumers purchase the level of allowances it supplies to the economy. Namely one considers (k_i)-amplified[48] equilibria at which the government announces a diminution of $(k_i - 1)s_i$ of its supply of allowances whenever consumer i purchases s_i allowances. Therefore

[48] In the following $k_i > 1$

each consumer considers that when it purchases s_i allowances, the state of the environment is improved of $k_i s_i$.

However, consumers may anticipate that the amplification of their purchases by the government leads to a diminution of their own initial endowment in allowances and hence of their wealth. Taking this fact in consideration they may strategically reduce their purchase of allowances. Such a failure may be easily overcame. It suffices that the government announces it will amplify one agent purchase by diminishing only the other agents initial endowments. Such a mechanism can be related to the matching process described by Guttman in (9).

One can then define a (k_i)-amplified equilibrium as :

Definition 5 *An allocation* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j)))$ *in* $(\mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+)^m \times \prod_{j=1}^n (Y_j \times \mathbb{R}_-)$ *is a* (k_i)*-amplified public marginal pricing equilibrium with transfers*[49] *if there exist a price* $(\overline{p}, \overline{q}) \in \mathbb{R}^{L+1}_+$ *and a wealth allocation* $(w_1, \cdots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ *with* $\sum_{i=1}^m w_i = (\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\omega + \sum_{j=1}^n \overline{y}_j, A - \sum_{i=1}^m (k_i - 1)\overline{s}_i + \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j))$ *such that :*

1. *For every* i, $(\overline{x}_i, \overline{s}_i)$ *maximizes* $u_i(x_i, -A + \sum_{h \neq i} k_h s_h + k_i s_i)$ *among the feasible consumption plans* $\{(x_i, s_i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^L_{++} \mid \overline{q} s_i + \overline{p} \cdot x_i \leq w_i\}$;
2. *For all* j,$\overline{p} + \overline{q} \nabla f_j(\overline{y}_j) \in N_{Y_j}(\overline{y}_j)$;
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$;
4. $\sum_{i=1}^m \overline{s}_i = \sum_{j=1}^n f_j(\overline{y}_j) + A - \sum_{i=1}^m (k_i - 1)\overline{s}_i$;

At a (k_i)-equilibrium, the first-order conditions for the consumers program are given by the following Lemma :

Lemma 2 *Let* $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^L_{++}$:

- *The bundle* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i)$ *with* $\overline{s}_i > 0$ *solves the consumer problem if and only if* $(\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\overline{x}_i, \overline{s}_i) = w_i$ *and* $(\overline{p}, \frac{\overline{q}}{k_i}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m k_i \overline{s}_i)}(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m k_i \overline{s}_i)$.
- *The bundle* $(\overline{x}_i, 0)$ *solves consumer* i *program if and only if* $\overline{p} \cdot \overline{x}_i = w_i$ *and there exist* $\overline{q}_i \leq \overline{q}$ *such that* $(\overline{p}, \frac{\overline{q}_i}{k_i}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m k_i \overline{s}_i)}(\overline{x}_i, -A + \sum_{i=1}^m k_i \overline{s}_i)$.

Proof: *The proof is similar to this of Lemma* 1 *but for the* $\frac{1}{k_i}$ *coefficient whose presence is due to the amplification of the consumers purchases.*

[49] *in extenso :* a marginal pricing equilibrium with transfers and k times amplification of the public use of allowances

This characterization yields that every Pareto optimum at which consumer i marginal utility for the environment [50] , $\overline{q}_i$, is lower than $\frac{\overline{q}}{k_i}$ can be decentralized as a public equilibrium :

Proposition 4 *For every Pareto optimum at which consumer i marginal disutility , $\overline{q}_i$, is lower than $\frac{\overline{q}}{k_i}$, there exist an initial allocation of allowances which allows to decentralize it as a (k_i)-amplified equilibrium.*

Proof: *The proof is similar to this of Proposition* 2 : *one considers the corresponding private equilibrium and show that the necessary conditions for the consumers program given by Lemma* 2 *are satisfied when each consumer actually purchase* 0 *allowances.*

While $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i}$ is greater than 1, one has a testable condition for optimality analogous to this given by Proposition 3, an amplified equilibrium is optimal only if at least one consumer is priced out of the allowance market :

Proposition 5 *Let (k_i) such that $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} > 1$, a (k_i)-equilibrium $(\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j))$ is Pareto optimal only if there exist i such that $s_i = 0$.*

Proof: *The proof is similar to this of Proposition* 3.

Remark 1 *In fact, the preceding can be strengthen to : if I_1 is a subset of consumers such that $\sum_{i \in I_1} \frac{1}{k_i} > 1$, it can not be that every agent in I_1 purchases a positive level of allowances.*

According to Lemma 2, as $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i}$ decreases towards 1, the constraint bearing on the consumers allowances choices become tighter and tighter (as every agent marginal utility must be at least k_i times smaller than the allowance price). There are fewer and fewer equilibria and consequently the set of equilibria surround more and more closely the set of Pareto optima.

When $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i}$ reaches 1, the (k_i)-amplified equilibria finally satisfy sufficient conditions for optimality in the sense of :

[50] Here $\overline{q}_i$ and $\overline{q}$ are the elements given by Theorem 1.

Proposition 6 *Let* (k_i) *such that* $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} = 1$. *At a* (k_i)*-amplified equilibrium* $(\overline{x}_i, \overline{s}_i), (\overline{y}_j, f_j(\overline{y}_j))$ *such that for all* i, $\overline{s}_i > 0$, *the necessary conditions of Theorem* 1 *hold. If moreover, the production sets and the environmental damages functions are convex, such an equilibrium is Pareto optimal.*

Proof: *Indeed according to Lemma* 2, *at such an equilibrium one has* $(\overline{p}, \frac{\overline{q}}{k_i}) \in N_{P_i(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^{n} f_j(\overline{y}_j))}(\overline{x}_i, \sum_{j=1}^{n} f_j(\overline{y}_j))$. *Together with the other equilibrium conditions, it implies the necessary conditions of Theorem* 1 *are satisfied. As those conditions are sufficient for optimality under the additional convexity assumptions on the production, the proof is complete.*

Bibliographie

[1] IPCC (2001) IPCC Third Assessment Report, Climate Change 2001

[2] Arrow, K.J (1969) "The organization of economic activity : Issues pertinent to the Choice of Market versus Non-Market allocation", in Joint economic commitee, The analysis and evaluation of Public Expenditures ; The PPB System, Washington DC : Government Printing Office, pp 47-64.

[3] Bonnisseau, J-M. (1994) "Caractérisation des optima de pareto dans une économie avec effets externes." Annales d'économie et de statistique, No. 36

[4] Boyd, J. and Conley, John P. (1997) "Fundamental Nonconvexities in Arrovian Markets and a Coasian Solution to the Problem of Externalities" Journal of Economic Theory, Vol. 72, 1997, pp. 388-407.

[5] Coase, R (1960) "The Problem of Social Cost " . Journal of Law and Economics, vol 3(1), pp 1-44.

[6] Conley John P and Stefani C. Smith, (2005)."Coasian equilibrium", Journal of Mathematical Economics, vol. 41(6), pp 687-704.

[7] Guesnerie, R. (2003) (sous la direction de) "Kyoto et l'économie de l'effet de serre ", Conseil d'analyse économique no. 39, Paris, La Documentation française.

[8] Guesnerie,R. (1975) "Pareto optimality in non-convex economies", Econometrica, 1975 vol 43, pp 1-29

[9] Guttman, J. (1978) "Understanding Collective Action : Matching Behavior," American Economic Review, vol 68, pp 251-55.

[10] Laffont, J, J. (1978) "Effets externes et théorie économique", Monographie du Séminaire d'économètrie. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

[11] Smith, S. and Yates, A. (2003) "Should Consumers Be Priced Out of Pollution Permit Markets ?" Journal of Economic Education Volume 34, No. 2 pp : 181-189

Chapitre 4

Externalités et anticipations dans l'économie du changement climatique

Résumé

Nous étendons le problème de décentralisation des optima de Pareto dans une économie avec externalités à un cadre où les capacités de production prises en compte dans la définition de la notion d'optimalité peuvent être distinctes de l'agrégat des capacités de production telles que perçues par les entreprises. Ce cadre est élaboré pour rendre compte des anticipations apparemment divergentes des entreprises et des gouvernements sur les conséquences économiques du changement climatique. Nous montrons alors que le gouvernement peut créer un marché de « droits de production » afin de conduire les entreprises à choisir les productions qu'ils considère comme efficaces. Ces résultats sont ensuite interprétés dans le cadre d'une économie faisant face au changement climatique.

Production Externalities and Expectations Application to the economics of Climate Change.

A. Mandel[51]

Centre d'Economie de la Sorbonne, UMR 8174, CNRS-Université Paris 1.

Abstract

In this paper, we extend the problem of decentralization of Pareto optima in an economy with production externalities to the case where the production capacities upon which Pareto optimality is defined may differ from the aggregate of the firms expectations about their production possibilities. This issue is raised in order to deal with the seemingly different expectations of firms and governments about the economic consequences of climate change. We show the government can create a "production allowance" market in order to force the firms to produce in a way it considers as optimal. The results are then applied to the analysis of the economic and welfare consequences of climate change.

Key Words : General Equilibrium Theory, Pareto optimality, Externalities.

[51]The author is grateful to Professor Jean-Marc Bonnisseau for his guidance and many useful comments. All remaining errors are mine.

1 Introduction

This paper focuses on the following decentralization problem : given initial resources ω and a set of production technologies Z, how can the Pareto optima with regards to Z and ω be decentralized as competitive equilibria in an economy with general externalities where the individual production technologies are given by correspondences Y_j, sensitive to the other firms production choices? The standard decentralization problem à la Arrow-Laffont is encompassed in this setting when $Z = \{z \in \mathbb{R}^L \mid \exists (y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j}) \ s.t \ \sum_{j=1}^n y_j = z\}$, but it also allows us to deal with a more general problem when Z is a strict subset of $\{z \in \mathbb{R}^L \mid \exists (y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j}) \ s.t \ \sum_{j=1}^n y_j = z\}$. In the latter case, Z can be interpreted as the information the government has gained on the aggregate production possibilities in the economy through statistics and economic studies. It may be less optimistic than the aggregate of the firms expectations Y_j on the production possibilities, which may be erroneous because firms are imperfectly informed of the long term production possibilities or do not compute accurately the external effects they face.

The general equilibrium literature on decentralization with externalities was pioneered by Arrow (2) which builds upon the idea of the Coase theorem (8) and considers the decentralization of externalities as a problem of missing market. Arrow defines external effect as a relative notion : the influence of the use of good x by agent a on agent b, and therefore proposes the opening of one market of external effect per commodity and per couple of agents as a mean to restore Pareto optimality. Laffont (11) and Bonnisseau (4) extended this analysis to encompass consumption externalities and non-convexities. Another approach is this of Boyd and Conley (7) which consider externalities as a well defined physical entity : smoke, sulfur dioxide or the flowers of an orchard. They propose the use of allowances for externalities as public goods by the pollutees in order to implement Pareto optimality at a Lindhal like equilibrium. Now all those authors only study the case where $Z = \{z \in \mathbb{R}^L \mid \exists (y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j}) \ s.t \ \sum_{j=1}^n y_j = z\}$ and propose solution concepts which require the opening of a large number of markets and are subject to market failures, due to the exiguity of the market and the presence of non-convexities in the case of Arrow and followers and to the free-riding problem in the case of Boyd and Conley.

The main contribution of this paper is to introduce the possibility of differences between the set of efficient aggregate production techniques Z and the aggregate of the firms expectations about their production possibilities $\{z \in \mathbb{R}^L \mid \exists (y_j) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j(y_{-j})\ s.t\ \sum_{j=1}^{n} y_j = z\}$. Also the decentralization mechanism we propose is based on the opening of a single allowance market.

The motivation for introducing a distinction between the set of efficient production techniques Z and the aggregate of of the firms expectations Y_j comes from the following remark on the economics of climate change : many of the potential consequences of climate change, such as changes in agricultural yields and in localization of crops, disruption of ecosystems or increased vulnerability of physical capital (see the IPCC report (1) for an extensive list) are likely to affect the production possibilities of economies. On the other hand, the production sector is partly responsible for climate change because of its greenhouse gases emissions. We therefore have a typical production externality. Moreover, the polluters, energy intensive industries, are well identified. However the potentially damaged firms have never claimed for a compensation and have even less advocated the opening of markets of allowances thanks to which they could influence the state of the environment. On the contrary, markets of allowances for greenhouse emission gases have been launched by governments after they had limited the firms greenhouse gases emission allowances. The central idea of this paper is that this divergence between market and public concern comes from the fact that both have different expectations on the influence of climate change on future production possibilities. That is the lack of a spontaneous creation of an emission market can be interpreted as an aggregate expectation of the production sector that losses due to climate change are not considerably higher than the transaction costs associated with the operation of an emission market. Public action is then unnecessary if the government shares this opinion of the production sector on the influence of climate change. On the contrary, we argue that the government judges it is necessary for him to intervene because it doesn't share the aggregate beliefs of the producers on their inter-temporal production possibilities. It is indeed less optimistic.

This conclusion is the rational to build a model which encompasses differences between the efficient aggregate productions, which represent the government expectations, and the aggregate of the firms expectations about production possibilities. We identify thanks to the standard first and second welfare theorems the Pareto optima of the economy with the competitive equilibria with regards to the "government production set" Z and focus on the decentralization of those Pareto optima in the economy with production externalities described by production correspondences Y_j. A possibly puzzling feature of the model is that, until the application to climate change of the last section, we do not introduce time explicitly. Even though the problematic is clearly intertemporal, the density of the general equilibrium model allows us to encompass time implicitly by considering that the goods are dated and that there exist a complete set of markets. The only rational that would remain to introduce explicitly time is to account for incompleteness of financial markets, but it seems to us this would unnecessarily complicate the analysis.

The solution concept we propose is the opening of a single market of "production allowances" which represent the right to lead the aggregate production away from the efficiency frontier. Indeed the distance to the efficiency frontier can be seen as a summary of the quantity of "bad" in the economy. This solution concept is on two grounds inspired by the work of Luenberger. First, the definition of the production allowance is related to the shortage function introduced in the literature by Luenberger (12) and Bonnisseau-Cornet (6). Second the production allowance "alters the individual [profit] functions so that they correspond to the appropriate social [profit] functions" and "Once individual [profit] functions are corrected, individual actions, designed to maximize these functions, will lead to Pareto efficiency." (see Luenberger ((13)). Indeed we show that the opening of a "production allowance" market allows for decentralization of Pareto optima when the firms are more "optimistic" than the government as well as in the standard setting of economies with externalities.

In the last section, we further specify the model and consider explicitly an economy undergoing climate change. In this framework the production allowance market is needed to transfer the government expectations about climate change to the firms but an emission allowance market or markets for external effects *à la* Arrow can then be used in order to allocate efficiently the cost of reducing externalities. A tentative interpretation of our results in this framework is to state that a precise view of the actions needed to adapt to climate change is necessary for the firms to address efficiently the mitigation issue.

2 The model

We consider a general equilibrium economy [52] with a finite number of goods indexed by $\ell = 1 \cdots L$, a finite number of producers indexed by $j = 1 \cdots n$, a finite number of consumers indexed by $i = 1 \cdots m$ and a government.

We allow for general externalities between producers and therefore represent, following Arrow (2) and Laffont (11), firm j production capacities by a correspondence $Y_j : (\mathbb{R}^L)^{(n-1)} \to \mathbb{R}^L$. It associates to an environment[53] $y_{-j} \in (\mathbb{R}^L)^{(n-1)}$ corresponding to the other firms production choices, the set $Y_j(y_{-j}) \subset \mathbb{R}^L$ of production plans firm j then considers as feasible. Such a representation allows to encompass every possible relation between the production process and the environment. We shall assume those characteristics satisfy the standard assumptions needed to define competitive behavior in presence of externalities (11) :

Assumption (P) *For all j, Y_j is lower semi-continuous, has a closed graph and convex values. One has the possibility of inaction : $0 \in Y_j(0)$ and free-production is impossible asymptotically :* [54] *for all $(\zeta_j) \in (\mathbb{R}^L)^n$, $\mathcal{A}(\prod_{j=1}^n Y_j(\zeta_{-j})) \cap \{(\zeta_j) \in (\mathbb{R}^L)^n \mid \sum_{j=1}^n \zeta_j \geq 0\} = \{0\}$.*

The consumers are standard utility maximizers. Following Arrow (2) we do not take in consideration externalities in the consumption sector as our main concern is the efficiency of the production process. Agent i consumption set is $\mathbb{R}^L_+$ and its preferences are represented by an utility function $u_i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$. We assume :

Assumption (C) *For all i, u_i is continuous, quasi-concave and locally non-satiated. At least one of the u_i is strictly monotone.*

The initial resources of the economy are set equal to $\omega \in \mathbb{R}^L_{++}$.

On the other hand, we introduce the set, $Z \subset \mathbb{R}^L$, of production plans the government considers as feasible in the aggregate. We assume it fits into a framework *à la Arrow-Debreu* (9) :

[52] Notations : $\mathbb{R}^L_{++}$ will denote the positive orthant of $\mathbb{R}^L$ and $\mathbb{R}^L_+$ its closure. Given an index set A and a family of elements indexed by A $(x_a)_{a \in A}$, x_{-a} denotes the family of elements indexed by $A - \{a\}$, $(x_b)_{b \in A-\{a\}}$. Given a convex set X and $x \in X$, $N_X(x)$ denotes the normal cone to X at x and $T_X(x)$ the tangent cone to X at x.

[53] y_{-j} denotes the vector $(y_1, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots y_n) \in (\mathbb{R}^L)^{(n-1)}$.

[54] $\mathcal{A}Z$ denotes the asymptotic cone to Z.

Assumption (G) *Z is closed, convex, satisfies free-disposability, production irreversibility and possibility of inaction.*

We shall also assume the government only anticipates production plans that are technically feasible from the producers point of view :

Assumption (Decentralizability) *For all $z \in Z$, there exist $(y_j) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j(y_{-j})$ such that $\sum_{j=1}^{n} y_j = z$.*

That is, the government can not be more "optimistic" than the firms.

2.1 The government point of view

With regards to the government production set, Z, an allocation $(\overline{x}_i) \in (\mathbb{R}^L_{++})^m$ is Pareto optimal if $\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i - \omega \in Z$ and if there does not exist an allocation $x'_i \in \mathbb{R}^L_+$ with $\sum_{i=1}^{m} x'_i - \omega \in Z$ such that $u_i(x'_i) \geq u_i(\overline{x}_i)$ for all i with a strict inequality for at least an i_0. Note that we focus on the Pareto optima lying in the interior of the consumption sets. So that, according to the seminal first and second welfare theorems (9), the set of those Pareto optima coincide with the competitive equilibria of an economy whose production set is Z. That is :

Proposition 1 *An allocation $(\overline{x}_i) \in (\mathbb{R}^L_{++})^m$ is Pareto optimal if and only if there exist an aggregate production plan $\overline{z} \in Z$, a price $\overline{p} \in \mathbb{R}^L_{++}$ and an assignment of wealth levels $(w_1, \ldots, w_m)$ with $\sum_{i=1}^{m} w_i = \overline{p} \cdot (\overline{z} + \omega)$ such that :*

1. *$\overline{z}$ maximizes profit at price $\overline{p}$ in Z*
2. *$\overline{x}_i$ maximizes u_i in the budget set $\{x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x_i \leq w_i)\}$*
3. *$\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i = \overline{z} + \omega$*

An allocation $((\overline{x}_i), \overline{z}, \overline{p})$ satisfying conditions (1) to (3) is a competitive equilibrium "from the government point of view" : it is the type of outcome which should emerge if the government expectations about the production possibilities are accurate and if the economy follows an efficient productive and exchange process. Note that the existence of such an equilibrium, and hence of a Pareto

Optimum, is a direct consequence of the standard existence proof *à la* Arrow-Debreu under assumptions [C] and [G]. In the following, taking the government point of view, we investigate which policies the government can implement in order to promote the decentralization of these Pareto optima.

2.2 Production Allowance Market

In our framework, competitive behavior of the firms may lead to two types of failures. The first is a seminal problem in presence of externalities : the improper aggregation by the commodities prices of the cost of external effects leads to improper internalization of those effects by the firms (see Laffont (11)). It may then be that the decentralized choices of the firms lead to an aggregate production below the efficiency frontier ∂Z.

A second type of failure may occur when the firms are *over-optimistic* in the sense that Z is a strict subset of $\{z \in \mathbb{R}^L \mid \exists (y_j) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j(y_{-j}) \ s.t \ \sum_{j=1}^{n} y_j = z\}$. It can then be that firms choices correspond to an aggregate production outside Z which firms might, from the government point of view, finally fail to produce. This may well disorganize the whole economy and thus lead to heavy welfare losses. The consideration of such a failure is consubstantial to the distinction we make between the government and the firms production sets (which may in particular correspond to different beliefs on the extent of external effects).

Hence, the government objective is to maintain the aggregate production on the thin line drawn by the boundary of Z in between inefficiency and unrealizability. Due to the welfare losses they cause, inefficiency and unrealizability may be considered as public bads. It then is very tempting, thinking of the Coase theorem and of the previous general equilibrium literature on decentralization with externalities (2), (7), (9), to consider the use of a market of allowances as a mean to overcome these failures. Moreover, given the duality between inefficiency and unrealizability, a single market might well be sufficient to overcome both failures.

In all generality, we can describe the creation of an allowance market as follows. The government defines throw an "allowance function" $h_j : (\mathbb{R}^L)^n \to \mathbb{R}$, the quantity of allowances $h_j(y_j, \overline{y}_{-j})$ firm j should use as input in order to produce y_j within an environment $(\overline{y}_{-j})$. That is firm j production correspondence is turned to $G_j : (\mathbb{R}^L)^{n-1} \to \mathbb{R}^{L+1}$ defined by

$$G_j(\overline{y}_{-j}) = \{(y_j, \alpha_j) \in \mathbb{R}^{L+1} \mid y_j \in Y_j(y_{-j}) \ , \ \alpha_j \leq -h_j(y_j, \overline{y}_{-j})\}.$$

Competitive behavior of the producers is well defined in this setting provided the allowance function satisfies the following assumption :

Assumption (Allowance) *For all j, for all $(\overline{y}_j) \in (\mathbb{R}^L)^n$ the mapping $h_j(\cdot, \overline{y}_{-j})$ is continuous, convex and satisfies $h_j(0,0) = 0$.*

On the other hand, the government supplies the economy with a quantity $A \in \mathbb{R}$ of allowances by initially allocating the agents (If $A < 0$ one should consider the government imposes "initial obligations"). Trades occur on the market so that each agent might fulfill its requirements. Given a governmental supply of allowances $A \in \mathbb{R}$, we can define a price equilibrium of the economy with production allowances as :

Definition 1 (Price Equilibrium with Allowances) *A collection of production plans $(\overline{y}_j, \overline{\alpha}_j) \in \prod_{j=1}^n G_j(y_{-j})$ together with a collection of consumption plans $(\overline{x}_i) \in (\mathbb{R}^L_{++})^m$ is a Price Equilibrium with Allowances if there exist a price $(\overline{p}, \overline{q}) \in \mathbb{R}^{L+1}_{++}$ and an assignment of wealth levels $(w_1, \ldots, w_m)$ with $\sum_{i=1}^m w_i = (\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega, \sum_{j=1}^n \overline{\alpha}_j + A)$ such that :*

1. *For all j,$(\overline{y}_j, \overline{\alpha}_j)$ maximizes profit, $(\overline{p}, \overline{q}) \cdot (y_j, \alpha_j)$, in $G_j(\overline{y}_{-j})$;*
2. *For all i, $\overline{x}_i$ maximizes $u_i(x_i)$ in the budget set $\{x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$;*
3. *$\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$;*
4. *$\sum_{j=1}^n \overline{\alpha}_j + A = 0$.*

2.3 Example of Allowance Functions

The model can represent the actual markets of allowances for greenhouse gases emissions in Europe or SO2 emissions in the united states, but the types of allowance we shall consider to obtain positive decentralization results are more elaborate and more abstract. Their construction is based on the idea that the level of "bad" in the economy can always be measured by the distance between the actual production and the production efficiency frontier ∂Z.

In order to construct such allowance functions, the shortage function as defined in Luenberger [10] and in Bonnisseau-Cornet [4] proves to be very useful. Given, a reference bundle of commodities $\gamma \in \mathbb{R}^L_{++}$, the shortage function for Z is defined on $\mathbb{R}^L$ by

$$g(z) = min\{s \in \mathbb{R} \mid z - s\gamma \in Z\}.$$

It provides an intrinsic measure of the distance between the actual production and the frontier of Z and can be interpreted wether as how many reference commodity bundles will fail to be produced when the producers are over-optimistic wether as how many more reference commodity bundles could be produced if the external effects were properly internalized. It moreover characterize Z in the sense of the following lemma whose proof is straightforward :

Lemma 1 *Under assumption* (G), g *is a convex and continuous function such that :*

1. $z \in Z$ *if and only if* $g(z) \leq 0$;
2. *For every* $z \in \partial Z$, $N_Z(z) =< \partial g(z) >$.

Based on this shortage function, one can define firm j allowance function by :

– A share in the aggregate level of "bad"

$$h^1_j(y_j, \overline{y}_{-j}) = \frac{g(y_j + \sum_{k \neq j} \overline{y}_k)}{n}$$

– The difference between the aggregate level of "bad" when it produces and this when it does not produce

$$h^2_j(y_j, \overline{y}_{-j}) = g(y_j + \sum_{k \neq j} \overline{y}_k) - g(\sum_{k \neq j} \overline{y}_k).$$

– A convex and increasing transformation of the preceding :

$$h^3_j(y_j, \overline{y}_{-j}) = \phi(g(y_j + \sum_{k \neq j} \overline{y}_k)) - \psi(g(\sum_{k \neq j} \overline{y}_k)).$$

Thanks to the properties of the shortage function, those functions satisfy the assumption (Allowance) and the assumption (Exact Compensation) introduced below.

2.4 Decentralization of Pareto optima

In order to allow for decentralization of Pareto optima, the allowance must compensate the differences between the aggregate (relative to Z) marginal rates of substitution and the individual ones (relative to Y_j) :

Assumption (Compensation) *For every production plan z associated to a Pareto Optimum, there exist $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ with $\sum_{j=1}^n y_j = z$ and $\lambda > 0$ such that for all j,*

$$N_Z(\sum_{j=1}^n \overline{y}_j) \subset N_{Y_j(y_{-j}}(y_j) + \lambda \partial h_j(\cdot, y_{-j})(y_j).$$

Note that the allowance functions h^1, h^2, and h^3 introduced in the preceding satisfy this condition as they are constructed upon the transformation function for Z and satisfy $< \partial h_j(\cdot, \overline{y}_{-j})(\overline{y}_j) >= N_Z(z)$, while for all $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$, one has $0 \in N_{Y_j(\overline{y}_{-j}}(\overline{y}_j)$.

This condition is in fact sufficient to obtain a decentralization result. One has :

Theorem 1 *Assume assumptions (P), (C), (G), (Decentralizability), (Allowance) and (Compensation) hold. Any Pareto Optimum can be decentralized as an equilibrium with allowances.*

Proof: *Let $(\overline{z}, (\overline{x}_i))$ be a Pareto optimal allocation and $\overline{p}$ the associate equilibrium price given by proposition* 1. *One clearly has $\overline{p} \in N_Z(\overline{z})$. Under assumption (Decentralizability) and (Compensation) there exist $(\overline{y}_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(\overline{y}_{-j})$ and $\overline{q} > 0$ such that $\sum_{j=1}^n \overline{y}_j = \overline{z}$, and $\overline{p} \in N_{Y_j}(\overline{y}_{-j}) + \overline{q}\partial h_j(\cdot, \overline{y}_{-j})(\overline{y}_j)$. Due to the convexity of $G_j(\overline{y}_{-j})$, this is a sufficient condition for $(\overline{y}_j, -h_j(\overline{y}_j, \overline{y}_{-j}))$ to maximize profit at price $(\overline{p}, \overline{q})$ in $G_j(\overline{y}_{-j})$. Choosing A such that $A = \sum_{j=1}^n h_j(\overline{y}_j, \overline{y}_{-j})$ the allowance market is cleared and one can implement the wealth distribution $(\overline{p} \cdot \overline{x}_1, \ldots, \overline{p} \cdot \overline{x}_n)$ in order to implement the equilibrium consumption $\overline{x}_i$ as solutions to the consumers problems.*

Hence, the opening of an allowance market based on one of the functions h_1, h_2 or h_3 allows the decentralization of the Pareto optima.

Moreover, in the differentiable case, (Compensation) is necessary to obtain a complete decentralization result :

Theorem 2 *Assume Z has a smooth boundary [55] and one of the utility functions is smooth[56] and strictly concave. If (Compensation) does not hold, there exist at least a Pareto Optimum which can not be decentralized as an equilibrium with allowances.*

Proof: *Assume (Compensation) does not hold, that is there exist a Pareto optimal allocation $(\overline{z}, (\overline{x}_i))$, and an associated price $\overline{p}$ such that for every $(y_j) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j(y_{-j})$ with $\sum_{j=1}^{n} y_j = \overline{z}$ and for every $\lambda > 0$ there exist j such that $N_Z(\sum_{j=1}^{n} y_j) \not\subset N_{Y_j(y_{-j}}(y_j) + \lambda \partial h_j(\cdot, y_{-j})(y_j) >$. As Z is smooth, $N_Z(\sum_{j=1}^{n} y_j)$ is a half-line and hence one in fact has that whatever (y_j) and λ may be, for some j one has : $N_Z(\sum_{j=1}^{n} y_j) \cap N_{Y_j(y_{-j}}(y_j) + \lambda \partial h_j(\cdot, y_{-j})(y_j) = \emptyset$.*

Now, assume $(\overline{z}, (\overline{x}_i))$, can be decentralized as an equilibrium with allowances, $((y_j, \alpha_j), (\overline{x}_i))$. The strict concavity and the smoothness of one of the utility function imply the equilibrium price must be colinear to the price $\overline{p}$ given by proposition 1. Hence the equilibrium price must be of the form $(\overline{p}, q)$ for some $q > 0$. This equilibrium price must satisfy for every j, the first order condition for profit maximization at (y_j, α_j) : $\overline{p} \in N_{Y_j}(y_{-j}) + q \partial h_j(\cdot, y_{-j})(y_j)$. This contradicts the preceding and hence ends the proof.

Hence the use of an allowance function satisfying (Compatibility) is a necessary and sufficient condition to obtain a complete decentralization result thanks to the opening of a single allowance market.

On the other hand, as in Laffont (11) decentralization results may also be obtained through the setting of an appropriate tax scheme on the firms. Indeed, consider that given an environment $\overline{y}_{-j}$, firm j is forced to pay a tax equal to $\lambda h_j(y_j, \overline{y}_{-j})$, the benefits of those taxes being allocated to consumers. One can then define a price equilibrium with production tax as :

Definition 2 (Price Equilibrium with tax) *A collection of production plans $(\overline{y}_j) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j(\overline{y}_{-j})$ together with a collection of consumption plans $(\overline{x}_i) \in (\mathbb{R}^L_{++})^m$*

[55]That is ∂Z is a C^2-submanifold of $\mathbb{R}^L$ of codimension 1.
[56]C^2.

is a price equilibrium with production tax if there exist a price $\overline{p} \in \mathbb{R}_+^L$ *a level of tax* $\lambda > 0$ *and an assignment of wealth levels* $(w_1, \ldots, w_m)$ *with* $\sum_{i=1}^m w_i = \overline{p} \cdot \sum_{j=1}^n \overline{y}_j$ *such that :*

1. *For all* j, $\overline{y}_j$ *maximizes* $\overline{p} \cdot y_j - \lambda h_j(y_j, \overline{y}_{-j})$ *in* $Y_j(\overline{y}_{-j})$;
2. *For all* i, $\overline{x}_i$ *maximizes* $u_i(x_i)$ *in the budget set* $\{x_i \in \mathbb{R}_+^L \mid \overline{p} \cdot x_i \leq w_i\}$;
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$.

One then has

Theorem 3 *Assume assumptions (P), (C), (G), (Decentralizability), (Allowance) and (Compensation) hold. Any Pareto Optimum can be decentralized as a Price Equilibrium with production tax.*

Proof: *Let* $(\overline{z}, (\overline{x}_i))$ *be a Pareto optimal allocation and let us consider according to theorem* 2 *an equilibrium with allowances,* $((\overline{p}, \overline{q}), (\overline{y}_j, \overline{\alpha}_j), (\overline{x}_i))$ *which decentralize* $(\overline{z}, (\overline{x}_i))$. *Setting* $\lambda = \overline{q}$ *and implementing the revenue scheme* $(p \cdot \overline{x}_i)$, *such an equilibrium may be supported as an equilibrium with production tax as the consumers and producers programs are equivalent to those at the corresponding equilibrium with production allowances.*

In fact the tax scheme is chosen such that firm j has to pay the exact amount it was spending in production allowances at the competitive equilibrium decentralizing the Pareto Optimum under consideration. Now, the setting of efficient taxes is less convincing than the market decentralization as no mechanism can be used in order to determine the optimal tax rate.

3 First Welfare Like Theorems

The decentralization results *à la* Arrow-Laffont, (2) and (11), rely on the confrontation of supply and demand for external effects. Therefore the standard first welfare theorem provide a strong intuition that a first welfare theorem will also hold in their framework. It is not the case here : the allowance market drives the price to a Pareto Optimum supporting direction but nothing guarantees that the equilibrium production always lies on the efficiency frontier ∂Z. In this section, we consider two means the government can use to strengthen its influence on the allowance market and on the equilibrium outcome. The first one, through quantities, is to choose adequately the initial allocation of allowances. The second one, through prices, is to provide additional allowances in exchange of commodity bundles and hence to influence the equilibrium relation between the allowance and the commodities prices. By either of these means, one can obtain a first welfare like theorem.

3.1 Choice of the initial allocation in allowances

By fixing the initial allocation of allowances at a suitable level, the government can control the efficiency of the production process, provided the level of allowances used characterize exactly the efficiency of the production process :

Assumption (Characterized Efficiency) *There exist $\overline{A} \in \mathbb{R}$ such that for all $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ one has :*

$$\sum_{j=1}^{n} h_j(y_j, y_{-j}) = \overline{A} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} y_j \in \partial Z$$

This assumption always holds for the allowance function h^1 defined above but not necessarily for h^2 or h^3.

On another hand, one must guarantee there will not exist equilibrium prices that differ from the aggregate marginal cost of production. Two conditions are necessary therefore. First, the influence of the allowance market must coincide with the aggregate marginal cost of production. That is one must have :

Assumption (Exact Compensation) *For all $y_j \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ such that $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$, $\partial h_j(\cdot, y_{-j})(y_j)$ is equal among all j and one has $N_Z(\sum_{j=1}^n \overline{y}_j) =< \partial h_j(\cdot, \overline{y}_{-j})(\overline{y}_j) >$.*

This condition is also satisfied by h^1 (but also by h^2 and h^3).

Second, the producers behavior shall be governed by the allowance market. Therefore we shall posit that :

Assumption (Over Optimism) *For all* $y_j \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ *such that* $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$*, one has* $T_Z(\sum_{j=1}^n y_j) \subset \sum_{j=1}^n T_{Y_j(y_{-j})}(y_j)$ *(or equivalently* $\bigcap_{j=1\cdots n} N_{Y_j(y_{-j})}(y_j) \subset N_Z(\sum_{j=1}^n y_j)$*)*

This assumption is satisfied in particular when one of the individual technical constraint is not binding. For example, in our framework, the over-optimism of the producers and/or the presence of externalities (see section(4)) are likely to lead to an interiority condition of the type for all $y_j \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ such that $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$, one has for all j, $y_j \in intY_j(y_{-j})$, which clearly implies (Over Optimism). Also note that this assumption is labeled (Over-Optimism) as it can be interpreted as stating the firms production sets encompass locally the government one.

With those three additional assumptions, one can guarantee that for a well chosen supply of allowances, the equilibria with allowances always are Pareto optimal :

Theorem 4 *Assume assumptions, (P), (C), (G), (Allowance), (Characterized Efficiency), (Over Optimism) and (Exact Compensation) hold. There exist an initial supply of allowances* $\overline{A}$ *such that* $(y_j, \alpha_j), (x_i)$ *is an equilibrium with allowances if and only if* $(\sum_{j=1}^n y_j, (x_i))$ *is a Pareto Optimum.*

Proof: *Let* $\overline{A}$ *be the level of allowances given by the assumption (Characterized Efficiency) and* $(p, q, (y_j, \alpha_j), (x_i))$ *be an equilibrium with production allowance for this level of allowances. As* $q \neq 0$*, for all* j *the constraint* $\alpha_j \leq -h_j(y_j, y_{-j})$ *is necessary binding and therefore using clearance of the allowance market, one gets* $\sum_{j=1}^n h_j(y_j, y_{-j}) = \overline{A}$*. Hence using (Characterized efficiency) one has* $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$*.*

Let us then prove that $\sum_{j=1}^n y_j$ *maximizes profit in* Z*. As* Z *is convex, it suffices to show that* $\sum_{j=1}^n y_j$ *satisfies the first order condition for profit maximization, that is* $p \in N_Z(\sum_{j=1}^n y_j)$*. Now, one has under assumption (Over Optimism) that* $\bigcap_{j=1\cdots n} N_{Y_j(y_{-j})}(y_j) \subset N_Z(\sum_{j=1}^n y_j)$ $(*)$*.*

Moreover, for all j *as* $(y_j, -h_j(y_j, y_{-j}))$ *is profit maximizing in* $G_j(\overline{y}_{-j})$ *at price* (p, q)*, one has* $p \in N_{Y_j}(y_j) + q\partial h_j(y_j, y_{-j})$*. As* $\partial h_j(y_j, y_{-j})$ *is equal among* j*, this implies* $p - q\partial h_j(y_j, y_{-j}) \in \bigcap_{j=1\cdots n} N_{Y_j(y_{-j})}(y_j)$ *and hence* $p - q\partial h_j(y_j, y_{-j}) \in$

$N_Z(\sum_{j=1}^n y_j)$ because of (Over-Optimism). Using then (Exact Compensation) one has $\partial h_j(y_j, y_{-j}) \in N_Z(\sum_{j=1}^n y_j)$ and hence $p \in N_Z(\sum_{j=1}^n y_j)$.

Now, one can clearly implement the wealth distribution $(p \cdot \overline{x}_1, \ldots, p \cdot \overline{x}_n)$ in order to implement the consumptions $\overline{x}_i$ as solutions to the consumers problems. One can then apply proposition 1 and conclude.

Conversely, any Pareto Optimum can be decentralized as an equilibrium with allowances according to theorem 2. The (Characterized Efficiency) assumption implies that the corresponding allocation of allowances must be equal to $\overline{A}$.

Hence, one first obtains a "first welfare theorem" for allowance functions of type h_1.

3.2 First welfare through the allowance price

The condition of constant endowment in allowances and the assumption of (Characterized Efficiency) can be dispensed with if (Over-Optimism) holds for all the production plans below the efficiency frontier :

Assumption (Strong-Over-Optimism) *For all $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ such that $\sum_{j=1}^n y_j \in Z$, one has $T_Z(\sum_{j=1}^n y_j) \subset \sum_{j=1}^n T_{Y_j(y_{-j})}(y_j)$.*

Note that this is satisfied in particular when for all $y_j \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ such that $\sum_{j=1}^n y_j \in Z$, there exist j such that $y_j \in intY_j(y_{-j})$.

In this framework, efficiency can be achieved by linking allowance and commodities equilibrium prices through the government behavior. The mechanism applied is based on the idea that one of the aims of the government when it sets up the production allowance market is to prevent failures by the firms to deliver the production they had announced. If the government owns a stock of commodities corresponding to what it considers as the unrealizable part of the production, it may substitute for the firms if they fail to deliver and using its stock, supply the market at the announced level. The building of this stock may be related to the allowance market if one considers that firms may obtain from the government additional production allowances in exchange of commodities. Conversely if firms hold extra allowances they should be aloud to sell them to the government at the market price of some reference commodity bundle. The government hence clears the allowance market and imposes an equilibrium relation between the commodities and the allowance prices.

Expressly, let $\gamma \in \mathbb{R}^L_{++}$ be the reference commodity bundle used in the definition of the shortage function. The government is set to exchange allowances against commodity bundles γ. If the firm wishes to obtain additional allowances in exchange of commodities, the government simply create them thanks to its legal prerogatives. If the firm wishes to obtain commodities in exchange of allowances, the government purchases the corresponding amount of commodities on the market. Concerning the firms, the possibility to exchange allowances against commodities adds the technology $\{(t\gamma, -t) \in \mathbb{R}^{L+1} \mid t \in \mathbb{R}\}$ to their existing production capacities. The production correspondence of firm j is hence turned to

$$H_j(\overline{z}_{-j}) = \{(y_j, \alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{R}^{L+2} \mid \exists z_j \in Y_j(\overline{z}_{-j})\; y_j = z_j + \beta_j \gamma \;,\; \alpha_j + \beta_j \leq -h_j(z_j, \overline{z}_{-j})\}$$

Note that the level of allowance exchanged against commodities, β_j, and the level of allowance obtained on the market,α_j, are treated as separate variables. This is a technical trick needed to keep track of the quantity of commodities actually produced by the firm as $z_j = (y_j - \beta_j \gamma)$, which one needs to know in order to compute the external effects and the allowance requirements. As those two allowances can be turn one into the other at no cost, they somehow remain the same commodity, and the firms objective can be written as the maximization of the profit $(p, q) \cdot (y_j, \alpha_j + \beta_j)$ in $H_j(y_{-j} - \beta_{-j}\gamma)$.

When the government is assumed to systematically clear the market by exchanging the appropriate quantity $g \in \mathbb{R}$ of allowances against the value of the corresponding number of commodity bundles γ, an equilibrium for the initial allocation of allowances $\overline{A}$ is defined as :

Definition 3 [Equilibrium with allowance clearance]

A collection of production plans $(\overline{y}_j, \overline{\alpha}_j, \overline{\beta}_j) \in \prod_{j=1}^n H_j(y_{-j} - \beta_{-j}\gamma)$ *together with a collection of consumption plans* $(\overline{x}_i) \in (\mathbb{R}^L_{++})^m$ *form a price equilibrium with allowance clearance if there exist a price* $(\overline{p}, \overline{q}) \in \mathbb{R}^{L+1}_{++}$ *, a government extra supply of allowances* $g = -\sum_{j=1}^n \overline{\beta}_j$*, and an assignment of wealth levels* $(w_1, \ldots, w_m)$ *with* $\sum_{i=1}^m w_i = (\overline{p}, \overline{q}) \cdot (\sum_{j=1}^n \overline{y}_j + (g + \sum_{j=1}^n \overline{\beta}_j)\gamma + \omega, \sum_{j=1}^n \overline{\alpha}_j + \sum_{j=1}^n \overline{\beta}_j + \overline{A})$ *such that :*

1. *For all* j,$(\overline{y}_j, \overline{\alpha}_j, \overline{\beta}_j)$ *maximizes profit*, $(\overline{p}, \overline{q}) \cdot (y_j, \alpha_j + \beta_j)$, *in* $H_j(y_{-j} - \beta_{-j}\gamma)$;
2. *For all* i $\overline{x}_i$ *maximizes* $u_i(x_i)$ *in the budget set* $\{x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$;
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + (g + \sum_{j=1}^n \overline{\beta}_j)\gamma + \omega$;
4. $\sum_{j=1}^n \overline{\alpha}_j + \sum_{j=1}^n \overline{\beta}_j + \overline{A} = 0$.

One should remark that clearance of the allowance market by the government implies it must buy on the market the amount of commodities corresponding to the allowance it gets back or conversely that it supplies the commodities market with the bundles it obtains thanks to the extra allowances it supplies. Firms have a dual behavior. This is why the term $(\sum_{j=1}^n \beta_j + g)\gamma$ enters the equilibrium conditions on the commodities market, even though at equilibrium this quantity is null. Moreover, in order to balance its budget the government must wether set taxes on the consumers or subsidize them thanks to its surplus. Those operations are implicitly encompassed in the assignment of the wealth levels. An implicit assumption here is that the setting of those taxes (resp. subsidies) does not entail any form of strategic behavior of the consumers.

Now, the fundamental issue is that at equilibrium the price of the allowance is necessarily equal to this of the commodity bundle γ. That is :

$$q = p \cdot \gamma \qquad (\star)$$

Otherwise the firms would buy on the market an infinite amount of allowances in order to exchange them against commodity bundles, or *vice-versa*. This condition characterizes the ratio between the allowance price and the other commodities prices. In order to control the equilibrium distance to ∂Z, it then suffices to let it depend on this ratio and hence to choose allowance functions such that the marginal rate of substitution between the production allowance and the commodities is itself sensitive to the distance to ∂Z. One can choose for example, a particular case of h_3, an allowance function of the form

$$h_j(y_j, \overline{y}_{-j}) = \phi(g(y_j + \sum_{k \neq j} \overline{y}_k)) - \psi(g(\sum_{k \neq j} \overline{y}_k)).(\star\star)$$

where ϕ is a strictly convex function such that $\phi'(0) = 1$. Indeed, one can then check that :

1. $\partial h_j(\cdot, y_{-j})(y_j) \cdot \gamma \leq 1$ if and only if $\sum_{j=1}^n y_j \in Z$
2. $\partial h_j(\cdot, y_{-j})(y_j) \cdot \gamma = 1$ if and only if $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$.

The strict convexity of ϕ_j implies the marginal rate of substitution between production allowance and commodities increase with the distance to ∂Z ("with the level of bad"). The normalization of the derivative is not important *per se*. It must be understood in relation with the governmental exchange rate between commodities and allowances. Indeed, one will see below that an equilibrium price must satisfy $q\partial h_j(y_j, y_{-j}) = p$. Together with the price equilibrium condition $(\star)$ (determined by the governmental exchange rate), it implies that at equilibrium one must have $\partial h_j(y_j, y_{-j}) \cdot \gamma = 1$ which will guarantee according to the preceding that $\sum_{j=1}^{n} y_j \in \partial Z$. The same reasoning can be made whenever the derivative of ϕ in 0 equals the exchange rate between allowance and commodities. Finally, one has :

Theorem 5 *Assume assumptions (P), (C), (G), (Strong Over Optimism) hold and the allowance function is of the form* $(\star\star)$. *Any equilibrium with allowance clearance is Pareto optimal.*

Proof: *Let* $(p, q, (y_j, \alpha_j, \beta_j), (x_i))$ *be an equilibrium with allowance clearance. The first order conditions for profit maximization for firm* j *at* (p, q) *are* $p \in N_{Y_j}(y_j) + q\partial h_j(y_j, y_{-j})$ *and* $p \cdot \gamma = q$. *Taking the scalar product of this first equation by* γ *we get,* $p \cdot \gamma = q \in N_{Y_j}(y_j) \cdot \gamma + q\partial h_j(y_j, y_{-j}) \cdot \gamma$. *As* $\gamma \in \mathbb{R}^L_{++}$ *and* $N_{Y_j(y_{-j})}(y_j) \in \mathbb{R}^L_{+}$, *this implies* $q \geq q\partial h_j(y_j, y_{-j}) \cdot \gamma$. *and hence* $\partial h_j(y_j, y_{-j}) \cdot \gamma \leq 1$. *This implies according to the strict convexity assumption on the allowance function, that* $\sum_{j=1}^{n} y_j \in Z$. *Now, as* $\partial h_j(y_j, y_{-j})$ *is equal among* j, *one has* $p - q\partial h_j(y_j, y_{-j}) \in \cap_j N_{Y_j(y_{-j})}(y_j)$. *Under (Strong Over Optimism) this implies* $p - q\partial h_j(y_j, y_{-j}) \in N_Z(\sum_{j=1}^{n} y_j)$. *Now wether* $p \neq q\partial h_j(y_j, y_{-j})$ *and hence* $N_Z(\sum_{j=1}^{n} y_j) \neq \{0\}$ *which implies* $\sum_{j=1}^{n} y_j \in \partial Z$, *wether* $p = q\partial h_j(y_j, y_{-j})$ *which implies according to the preceding that* $\partial h_j(y_j, y_{-j}) \cdot \gamma = 1$. *The strict-convexity of the allowance function then imply that* $\sum_{j=1}^{n} y_j \in \partial Z$ *as underlined above. Anyhow, one has proved that* $\sum_{j=1}^{n} y_j \in \partial Z$, *and the remaining of the proof proceeds as in theorem* 4.

As the analogous of theorem 2 clearly holds for equilibria with allowance clearance, we have in fact proved that the equilibria with allowance clearance coincide with the Pareto optima. This solves in particular the problem of existence of an equilibrium with allowance clearance.

4 Applications

Until now, the government production set and hence the optimality criterion was exogenously given. Also, the relations between the firms and the government expectations was not explicit. We now introduce links between those in order to give a clearer interpretation of the preceding results.

4.1 Decentralization in an economy with production externalities

Let us first deal with the seminal problem of decentralization with externalities presented in Arrow (2) and Laffont (11). That is the decentralization of the Pareto optima with regards to the production capacities given by Y_j. If one then sets $Z = \{z \mid \exists (y_j) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j(y_{-j}) \ s.t \ z = \sum_{j=1}^{n} y_j\}$ those Pareto optima coincide with the "government Pareto optima" studied in the preceding section.

Assumption (Decentralizability) clearly holds in this framework, so that if the allowance functions are well chosen (e.g h^1 to h^3 above), one obtains a second welfare theorem as a corollary of theorems 1 and 3 :

Corollary 1 *Assume assumptions (P), (C), (G), (Decentralizability), (Allowance) and (Compensation) hold. Any Pareto optimum with regards to Y_j can be decentralized as an equilibrium with production allowances or as an equilibrium with production tax.*

On the other hand, to implement first-welfare like theorems, one must check that one of the over-optimism assumption holds. The strong form is irrelevant here as if it holds one can check every competitive equilibrium (without any additional market) is Pareto optimal and there is no need to discuss the properties of the allowance market.

However, the weaker form is likely to be satisfied. Expressly, it states that when the aggregate production is efficient, the corresponding individual productions are inefficient from the firms point of view (firms hence are locally over optimistic). By contraposition, this is equivalent with saying that when the firms consider their productions are efficient, the aggregate outcome in fact is inefficient. That is the externalities always lead to inefficiency when the firms are competitive. This holds when there is a strong correlation between the production capacities and the environment, for example when the graphs of the correspondences Y_j are strictly convex (see the appendix for an explicit proof).

It then suffices to choose an allowance function satisfying (Exact Compensation) and (Characterized Efficiency) in order to apply theorem 4 and to obtain a first-welfare like result. Namely :

Corollary 2 *Assume assumptions, (P), (C), (G), (Allowance), (Exact Compensation), (Over Optimism) and (Characterized efficiency) hold. There exist an allocation in allowances* $\overline{A}$ *such that* $(y_j, \alpha_j), (x_i)$ *is an equilibrium with allowance if and only if* $((y_j), (x_i))$ *is Pareto optimal with regards to the production capacities* Y_j.

4.2 Errors in the production sector

Let us now come closer to the problematic described in the introduction by explicitly considering the individual production correspondences are not accurate. To give a precise meaning to this sentence, we introduce explicitly "true" production possibilities at the individual level.

Indeed, we consider a situation where the "true " production possibilities are described by correspondences $Z_j : (\mathbb{R}^L)^n \to \mathbb{R}^L$, $Z_j((y_1, \cdots, y_n))$ being the production possibilities of firm j when the complete scheme of production plans in the economy is (y_j).[57] The government is informed of the aggregate production possibilities $Z = \{z \in \mathbb{R}^L \mid \exists (y_j) \in \prod_{j=1}^n Z_j(y_1, \cdots, y_n) \ s.t \ \sum_{j=1}^n y_j = z\}$ but not necessarily of the true individual production correspondences. On the other hand, the production possibilities perceived by the producers are given by correspondences $Y_j : (\mathbb{R}^L)^{(n-1)} \to \mathbb{R}^L$. We shall consider those are over-optimistic in the sense of one of the earlier assumptions and of course that they satisfy the (Decentralizability) requirement. One can for example think of the case where $Z_j \subset intY_j$ or even that the producers are not aware they face an external effect and anticipate their production set are the $\cup_{(y_j)\in(\mathbb{R}^L)^n} Z_j((y_j))$.

[57] Such a definition for production correspondences is somehow unusual as it allows producers to have an external effect on themselves. The motivations for such a modelization are presented in the appendix.

In this framework, decentralization results are direct consequences of theorems 1 and 3 :

Corollary 3 *Assume assumptions (P), (C), (G), (Decentralizability),(Allowance) and (Compensation) hold. Any Pareto optimum with regards to the production capacities Z_j can be decentralized in the economy with production capacities Y_j as an equilibrium with production allowance or as an equilibrium with production tax.*

Concerning first welfare like results, the introduction of the "true" production correspondences Z_j has add a new requirement on the individual choices of the producers : one must now guarantee that the production plans are "truly" feasible while theorems 4 and 5 only ensure the optimality and the feasibility at the aggregate level. They can be applied here if individual and aggregate feasibility coincide in the sense of :

Assumption (Feasibility Coincidence)

If $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ and $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$ then $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Z_j((y_j))$.

Theorems 4 and 5 then respectively yield :

Corollary 4 *Assume assumptions, (P), (C), (G), (Allowance), (Characterized Efficiency), (Over Optimism), (Exact Compensation), and (Feasibility Coincidence) hold. There exist an initial allocation in allowances $\overline{A}$ such that $(y_j, \alpha_j), (x_i)$ is an equilibrium with allowances of the economy with production capacities Y_j if and only if $((y_j), (x_i))$ is Pareto optimal with regards to the production capacities Z_j.*

Corollary 5 *Assume assumptions, (P), (C), (G), (Strong Over Optimism) and (Feasibility Coincidence) hold and the allowance function is of the form $(\star\star)$. Any equilibrium with allowance clearance of the economy with production capacities Y_j is Pareto optimal with regards to the production capacities Z_j.*

Now, it seems clear that for *Feasibility Coincidence* to hold one must restrict the type of errors the firms may make and the type of external effects they may face.

Roughly the assumption holds when errors and externalities are uniform among the firms. More precisely :

Assumption (Repartition Neutrality) *Consider an environment* $(w_j) \in \mathbb{R}^n$ *and a production scheme* $(z_j) \in \prod_{j=1}^n Z_j((w_j))$ *with* $\sum_{j=1}^n z_j \in \partial Z$. *For every* $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ *such that* $\sum_{j=1}^n y_j = \sum_{j=1}^n z_j$ *one has* $y_j \in \prod_{j=1}^n Z_j((w_j))$.

Assumption (Uniform Externalities) *For every* $(z_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(z_j)$ *and* $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ *such that* $\sum_{j=1}^n z_j = \sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$, *one has* $Z_j((z_j)) = Z_j((y_j))$.

Lemma 2 *Assumptions (Uniform Externalities) and (Repartition Neutrality) imply (Feasibility Coincidence).*

Proof: *Let* $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ *such that* $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$. *Hence there exist* (z_j) *such that* $\sum_{j=1}^n z_j = \sum_{j=1}^n y_j$ *and* $z_j \in \prod_{j=1}^n Z_j(z_1, \cdots, z_n)$. *Using assumption (Repartition Neutrality), one then has* $y_j \in \prod_{j=1}^n Z_j(z_1, \cdots, z_n)$. *On the other hand, assumption (Uniform Externalities) implies that for all* j $Z_j(y_1, \cdots, y_n) = Z_j(z_1, \cdots, z_n)$. *Hence one has* $(y_j) \in \prod_{j=1}^n Z_j((y_j))$.

(Repartition Neutrality) states that for a given environment, the "true" feasibility of a production scheme is independent of the repartition of the production among the firms. (Uniform Externalities) states that the externality faced by a producer depend only of the aggregate production level. It implies in particular that the externalities are not directed (i.e the source of the externality does not matter) and that the set of goods is comprehensive enough to let the production process (including external effects) be unambiguously characterized by the input-output combination implemented. The relevance of those assumptions appears more clearly when the production correspondences are thought to represent industries rather than individual producers. Indeed, the state of the environment is then determined by the sum of outputs of all industries (Uniform Externalities) and because the industries are specialized there usually is a sole way to allocate among them the aggregate production (this implies (Repartition Neutrality)). Expressly, one can consider there are k types of industries in the economy. To those k types is associated a partition of the space of goods in k subsets such that a firm of type k uses as input and produces as output only goods in the kth subset. There exist an arbitrary number of firms of each type but the environmental constraint they face due to the other sectors of the economy is collective. That is to say if $Z_1, \cdots, Z_{n_k}$ and $Y_1, \cdots Y_{n_k}$ are respectively the "true " and " anticipated "production correspondences of the firms of type k, there exist a technico-environmental constraint function for the firms of type k, $E_k : \mathbb{R}^L \times (\mathbb{R}^L)^{n-n_k} \to \mathbb{R}$ such that given an environment set up by the other types firms production $(w_{n_k+1}, \cdots w_n) \in (\mathbb{R}^L)^{(n-n_k)}$ one has for $(y_1, \cdots y_{n_k}) \in \prod_{j=1}^{n_k} Y_j(y_1, \cdots y_{n_k}, w_{n_k+1}, \cdots w_n)$:

$$(y_j) \in \prod_{j=1}^{n} Z_j((y_1, \cdots y_{n_k}, w_{n_k+1}, \cdots w_n)) \Leftrightarrow E_k(\sum_{j=1}^{n} y_j, (w_{n_k+1}, \cdots w_n)) \leq 0.$$

Within such a framework, all the preceding assumptions hold.

5 Conclusion : an economy undergoing climate change

Let us now apply the preceding results to the model of an economy undergoing climate change. This will allow us to get further insight on the interpretation of the production allowance market and to compare its properties with those of emission allowance markets which are actually used in real economies.

We consider a very simple model : an economy with L goods and two periods of time. There is a single state of nature in the first period denoted by 0 and S states of nature in the second period, denoted by $s = 1 \cdots S$. Those different states may summarize the uncertainty about climate change. There is a complete set of contingent markets *à la* Debreu (9) and we assume all the transactions take place during the first period.

Climate change is due to greenhouse gases emissions in the first period and affect the production possibilities in the second period. We denote by $Y_j(E) = (Y_j^0, Y_j^1(E), \cdots, Y_j^S(E))$ the production possibilities as expected by the producers given an aggregate emission level E in the first period. On the other hand, the true individual production possibilities are described by $Z_j(E) = (Y_j^0, Z_j^1(E), \cdots, Z_j^S(E))$ given an aggregate emission level E. Greenhouse gases emissions are measured according to a function f of the aggregate production in the first period. The government is well informed of the consequences of climate change and can compute accurately the emissions. Hence it considers the aggregate production possibilities are given by $Z = \{(z^0, z^1, \cdots, z^s) \mid \exists (z_j^0)\ s.t\ \sum_{j=1}^n z_j^0 = z^0\ and\ \forall s\ \exists (z_j^s) \in \prod_{j=1}^n Z_j^s(f(\sum_{j=1}^n z_j^0))\ s.t\ \sum_{j=1}^n z_j^s = z^s\}$.

In line with the arguments presented in the introduction, we shall assume (Decentralizability) and (Strong Over Optimism) hold [58] in order to translate the fact that the individual firms are less concerned than the government by the influence of climate change on future production possibilities. We can then embed this *Climate Change Economy* into the framework of section 4.2. In particular, one can construct as before a production allowance market and define equilibria with production allowances. Corollary 3 implies that every Pareto Optimum with regards to Z_j and ω, can be decentralized as a competitive equilibrium with production allowances. Corollaries 4 and 5 entail first-welfare like theorems. Hence the opening of a production allowance market seems a suitable solution to decentralize the Pareto optima of the climate change economy. According to theorem 2, it might even be the only one which requires the opening of only one market.

However the interpretation of the production allowance is problematic as it has two types of effects on the firms behavior. On the one hand it prevents firms from emitting too much greenhouse gases in the first period and on the other hand it prevents them from setting up over optimistic production plans in the second period. Those two influences can be isolated and the production allowance market is necessary only for the second purpose. The first one can be dealt with an emission allowance market or with external effect markets *à la* Arrow.

Indeed, let us now consider that the government introduces an emission allowance market in the first period. Therefore we assume that the aggregate emission level $f(z^0)$ can be computed by adding individual emissions $f_j(z_j^0)$ and that after allocating a quantity E of emission allowances to the firms, the government forces them to detain the quantity of emission allowances corresponding to their actual emission level ; the firms being aloud to trade those emission allowances on a market. We moreover consider that the government knows only the aggregate production set of the second period as a correspondence depending of the aggregate level of emission and that this set can be represented by a convex shortage function $g(E, \cdot)$ with the total emission level as a parameter. Now by setting a production allowance market for the second period where firm j production allowance requirement is computed according to the corresponding $h_j(E, \cdot)$, the

[58] We also assume (P)(C)(G)

government leads the economy to open two additional markets, one of emission allowance, one of production allowance. In this framework the production set of firm j becomes

$$C_j(E, y^s_{-j}) = \{(y_j, \alpha_j, \xi_j) \mid y_j \in Y_j(E)\ ,\ \alpha_j \leq -h_j(E, y^s_j, y^s_{-j})\ ,\ \xi_j \leq -f_j(y^0_j)\}.$$

The behavior of the consumers remaining unchanged, we can then define a price equilibrium of the climate change economy with production and emission allowances as :

Definition 4 (Equilibrium of the climate change economy) *Given a supply A of production allowance and a supply E of emission allowances, a collection of production plans $(\overline{y}_j, \overline{\alpha}_j, \overline{\xi}_j), \in \prod_{j=1}^n C_j(E, \overline{y}_{-j})$ together with a collection of consumption plans $(\overline{x}_i) \in (\mathbb{R}^L_{++})^m$ is an equilibrium of the climate change economy if there exist a price $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}) \in \mathbb{R}^{L+2}_+$ and an assignment of wealth levels $(w_1, \ldots, w_m)$ with $\sum_{i=1}^m w_i = (\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}) \cdot (\sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega, \sum_{j=1}^n \overline{\alpha}_j + A, \sum_{j=1}^n \overline{\xi}_j + E)$ such that :*

1. *For all j, $(\overline{y}_j, \overline{\alpha}_j, \overline{\xi}_j)$ maximizes profit, $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}) \cdot (y_j, \alpha_j, \xi_j)$, in $C_j(E, \overline{y}_{-j})$*
2. *For all i $\overline{x}_i$ maximizes $u_i(x_i)$ in the budget set $\{x_i \in \mathbb{R}^L_+ \mid \overline{p} \cdot x_i \leq w_i\}$*
3. $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$
4. $\sum_{j=1}^n \overline{\alpha}_j + A = 0$
5. $\sum_{j=1}^n \overline{\xi}_j + E = 0$

In a manner very similar to this of the proof of theorem 1, one can then prove that every Pareto Optimum can be decentralized as an equilibrium of the climate change economy : it suffices that the government chooses the optimal level of emissions for the first period and then lets the emission allowance and the production allowance markets operate. In the case of external effects *à la Arrow* or if firms use the emission allowance as a public good (See (7)) the optimal level of emissions might even be determined endogenously. Nevertheless, the production allowance market remains necessary to transfer to the firms information about the true production possibilities. Now, the main difference between this equilibrium concept and these of the preceding sections is that in the preceding, the production allowance market corrected indistinctly all the failures wether they were due to the external effects or to errors in expectations. Here, the production allowance market prevents firms from choosing unrealistic production plans for the second period while the emission allowance market controls the source of external effects.

As far as interpretation is concerned, the production allowance market can then be seen as a medium used by the government to transfer to the firms its expectations on the influence of climate change ; that is a proxy for an adaptation policy. Emission allowance market or external effects markets *à la* Arrow are, on the other hand, means to allocate efficiently the costs of reducing greenhouse emission gases in the first period, tools for a mitigation policy. Now emission allowance markets are not efficient unless production allowance markets also exist : recognizing the need for adaptation is a prerequisite for efficient mitigation through an endogenous determination of the optimal level of greenhouse gases emissions.

6 Appendix

6.1 Over-Optimism when the graphs of the production correspondences are strictly convex

Let us show that the (Over-Optimism) assumption holds when the graphs of the Y_j are strictly convex. The main remark needed therefore is that the strict convexity implies there is a unique way to write an element $z \in \partial Z$ as the sum of individual production plans $(y_j) \in \prod Y_j(y_{-j})$. Indeed assume there exist two distinct collections of production plans summing to $z \in \partial Z$. In other words there exist $(z_j), (y_j) \in \bigcap GraphY_j$ distinct and such that $\sum_{j=1}^n z_j = \sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$. Strict Convexity of the graphs then imply $\frac{1}{2}((z_j) + (y_j)) \in int(\bigcap GraphY_j)$. As $\sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(z_j + y_j) = z$, this implies $z \in intZ$ which contradicts $z \in \partial Z$.

On the other hand it is easy to check that the Over-Optimism condition holds if for every $y_j \in \prod_{j=1}^n Y_j(y_{-j})$ such that $\sum_{j=1}^n y_j \in \partial Z$, one has :

$$v \in \bigcap N_{Y_j(y_{-j})}(y_j) \Rightarrow (v, \cdots, v) \in \bigcap_{\{(z_j) \in \cap GraphY_j | \sum_{j=1}^n z_j = z\}} \sum_{j=1}^n N_{GraphY_j}(z_j)$$

This is straightforward here, as according to the preceding $\{(z_j) \in \cap GraphY_j \mid \sum_{j=1}^n z_j = z\}$ is a singleton and for all j one has $v \in N_{Y_j(y_{-j})}(y_j) \Rightarrow (0, \cdots, 0, v) \in N_{GraphY_j}(y_j)$

6.2 Complement on the definition of the production correspondences Z_j

The justification for letting the producers have an external effect on themselves is that we do not want to distinguish two external effects of the same nature because they have a different source. It seems to us that this approach is more appropriate for the intertemporal externalities we want to deal with in the applications. Namely if there are m different types of externalities in the economy and that given an environment defined by a vector of externalities $(e_1, \cdots e_m)$, the production possibilities of firm j are $S_j(e_1, \cdots e_m)$, while the externalities are well determined as functions of the production $f_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, f_m(y_1, \cdots, y_n)$, the production correspondence we consider is $Z_j(y_1, \cdots y_n) = \{y_j \in \mathbb{R}^L \mid y_j \in S(f_1(y_1, \cdots, y_n) \cdots f_m(y_1, \cdots, y_n))\}$. Note that one can easily turn to the usual framework by letting $Z'_j(y_{-j}) = \{y_j \in \mathbb{R}^L \mid y_j \in Z_j(y_{-j}, y_j)\}$.

Bibliographie

[1] IPCC (2001) "IPCC Third Assessment Report" – Climate Change 2001

[2] Arrow, K.J (1969) "The organization of economic activity : Issues pertinent to the Choice of Market versus Non-Market allocation", in Joint economic commitee, The analysis and evaluation of Public Expenditures ; The PPB System, Washington DC : Government Printing Office, pp 47-64.

[3] Barrett, S. (2003) "Environment and the statecraft" Oxford University Press.

[4] Bonnisseau, J-M. (1994) "Caractérisation des optima de Pareto dans une économie avec effets externes" Annales d'économie et de statistique. No. 36, 97-112.

[5] Bonnisseau, J-M and Crettez, B. (2006) "On the characterization of efficient production vectors." *Economic Theory*, vol.31(2), pp 213-223.

[6] Bonnisseau, J-M. and Cornet, B. (1988) "Existence of equilibria when firms follow bounded losses pricing rules" Journal of Mathematical Economics, vol. 17, issue 2-3, pp 119-147

[7] Boyd, J. and Conley, John P. (1997) "Fundamental Nonconvexities in Arrovian Markets and a Coasian Solution to the Problem of Externalities" Journal of Economic Theory, Vol. 72, 1997, pp. 388-407.

[8] Coase, R (1960) "The Problem of Social Cost", Journal of Law and Economics, vol.3(1), pp 1-44.

[9] Debreu, G (1959) "Theory of Value. An axiomatic analysis of economic equilibrium ", Cowles Foundation Monograph 17.

[10] Guesnerie, R. (2003) (sous la direction de) "Kyoto et l'économie de l'effet de serre ", Conseil d'analyse économique n° 39, Paris, La Documentation Francaise.

[11] Laffont, J, J. (1978) "Effets externes et théorie économique" Monographie du Séminaire d'économétrie. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

[12] Luenberger D. (1995) "Microeconomic Theory" McGraw-Hill, Inc., New York.

[13] Luenberger D. (1995) "Externalities and Benefits" Journal of Mathematical Economics 24, 159-177

Abstract

We propose a general equilibrium analysis of the economic consequences of the opening of new markets, such as markets of allowances created as a companion measure for climate change mitigation and adaptation.

In the first chapter, we introduce a theoretical framework : an economy with externalities and non-convexities. We establish an index formula and obtain as corollaries existence of equilibria with general pricing rules.

In the second chapter, the opening of an allowance market appears as a perturbation of this initial equilibrium state. We then determine which changes in the firms behavior ensure the existence of an equilibrium in the enlarged economy. This result can be interpreted as ensuring the economy can undergo the opening of a market of allowances without huge modifications of its organization.

In the third chapter we analyze the influence of the opening of an allowance market on the optimality properties of the marginal pricing equilibria. Pareto Optima can indeed be decentralized thanks to the free provision of an environmental public good by the government : the difference between the governmental supply of allowances and the situation that prevails under *laissez-faire*. We then studied refined notions of equilibria in order to strengthen the relations between Pareto Optima and equilibria through increased consumer participation in the market of allowances.

In the last chapter, we extend the decentralization problem to the case where the production capacities upon which Pareto optimality is defined may differ from the aggregate of the firms expectations about their production possibilities. This issue is raised in order to account for the seemingly different expectations of firms and governments on the economic consequences of climate change. We then show the government can create a “production allowance” market in order to lead the firms to produce according to its expectations.

Résumé

Nous analysons à travers le prisme de la théorie de l'équilibre économique général les conséquences de l'ouverture des nouveaux marchés, du type droits d'émission, institués dans le cadre des politiques d'atténuation et d'adaptation au changement climatique.

Dans le premier chapitre nous introduisons un cadre théorique pour l'analyse : une economie avec externalités et rendements croissants. Nous y établissons une formule de l'indice et obtenons comme corollaire l'existence d'équilibres de tarifications générales.

Dans le second chapitre, l'ouverture d'un marché de droits apparaît comme une perturbation de cette situation initiale d'équilibre. Nous décrivons alors les évolutions dans les choix des entreprises qui garantissent l'existence d'un équilibre dans l'économie élargie. Ce dernier résultat peut être interprété comme assurant que l'économie peut s'adapter à la présence d'un marché de droits sans modification drastique de son organisation.

Dans le troisième chapitre, nous analysons l'influence de l'ouverture du marché de droits sur l'optimalité au sens de Pareto des équilibres de tarification marginale de l'économie. Il s'avère que les Optima de Pareto peuvent être décentralisés grâce au fait qu'en fixant un niveau maximal de pollution, le gouvernement fournit gratuitement à l'économie un bien public consistant en la différence entre ce niveau et la situation prévalant dans le cadre du laissez-faire. Nous étudions ensuite divers raffinements de la notion d'équilibre basés sur l'incitation des consommateurs à la participation au marchés de droits.

Dans le dernier chapitre, nous étendons le problème de décentralisation des Optima de Pareto au cas où les capacités de production prises en compte dans la définition de la notion d'optimalité sont distinctes de l'agrégat des capacités de production telles que perçues par les entreprises. Ce cadre est élaboré pour rendre compte des anticipations apparemment divergentes des entreprises et des gouvernements sur les conséquences économiques du changement climatique. Nous montrons alors que le gouvernement peut créer un marché de « droits de production » afin de conduire les entreprises à choisir les productions qu'il considère comme efficaces.